I - Préliminaires : étude de quelques éléments de E

I.A - Des fonctions de E utiles pour la suite

Q.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On voit d'abord que p_α est continue sur $]0, +\infty[$.
On pose $h_\alpha : t \mapsto \frac{(p_\alpha(t))^2 e^{-t}}{t} = t^{2\alpha-1}e^{-t}$. Elle est continue sur $]0, +\infty[$ et positive.

- Au voisinage de 0, $h_\alpha(t) \underset{0}{\sim} t^{2\alpha-1} = \dfrac{1}{t^{1-2\alpha}} \geqslant 0$.
  Comme $t \mapsto \frac{1}{t^{1-2\alpha}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, puisque $1 - 2\alpha < 1$, la fonction h_α est intégrable sur $]0, 1]$.
- Au voisinage de $+\infty$, $t^{2\alpha-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $t^{2\alpha+1}e^{-t}$ tend vers 0 en $+\infty$ par croissance comparée. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, h_α aussi.

Finalement, $h_\alpha \in E$.

Q.2 Soit P une fonction polynomiale. Elle est continue sur $]0, +\infty[$.
On pose $h : t \mapsto \dfrac{(P(t))^2 e^{-t}}{t}$ qui est continue sur $]0, +\infty[$.

- Si $P(0) \neq 0$, on voit que $h(t) \underset{0}{\sim} \frac{P^2(0)}{t}$, cette fonction garde un signe constant. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, on peut donc en utilisant le critère de comparaison des fonctions positives dire que h n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. Cela montre que $P \notin E$.
- Si $P(0) = 0$. On obtient que $P(t) = \underset{0}{O}(t)$ et donc $h(t) = \underset{0}{O}(t)$. En particulier h est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0, 1]$. De plus, en procédant comme ci-dessus, $h(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ce qui permet là encore de montrer que h est intégrable sur $[1, +\infty[$. En conclusion, $P \in E$.

Q.3 Si $a = b = 0$, la fonction est nulle et $\tilde{0} \in E$.
Réciproquement, supposons que $a \neq 0$, au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{(ae^t + b)^2 e^{-t}}{t} \sim \frac{a^2 e^t}{t} \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty$$

La fonction n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. La première condition d'intégrabilité est que $a = 0$.
Supposons que $a = 0$, la fonction est une fonction polynomiale constante, elle est dans E si et seulement si $b = 0$.

Q.4 La fonction $u : t \mapsto \frac{(e^t - 1)^2 e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, x]$, de plus

$$\frac{(e^t - 1)^2 e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{t^2 \times 1}{t} = t$$

La fonction u est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0, x]$.

Q.5 Par définition pour $t \in]0,x]$, $k_x(t) = e^t - 1$ et $k_x(t) = e^x - 1$ pour $t \in [x,+\infty[$. On voit que k_x est continue sur $]0,+\infty[$. On pose $h : t \mapsto \frac{k_x(t)^2 e^{-t}}{t}$.
D'après la question précédente k est intégrable sur $]0,x]$.
De plus $h(t)$ est négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. On en déduit que h est intégrable sur $[x+1,+\infty[$.
Finalement, $h \in L^1(]0,+\infty[)$ et donc $k_x \in E$.

I.B - Une condition suffisante d'appartenance à E

Q.6 Commençons par justifier que la fonction Φ est bien définie.
Soit $x > 0$. La fonction $v : t \mapsto \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,x]$. De plus $v(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,x]$ donc v aussi. Cela justifie que Φ est bien définie.
On peut écrire pour $x > 0$:

$$\Phi(x) = \frac{4\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{x+1} - \int_0^1 \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\,dt - \int_1^x \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\,d$$

Comme $t \mapsto \dfrac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1,x[$ (ou $]x,1]$) la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$:

$$\Phi'(x) = (x-1)^2 \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}(x+1)^2} \geqslant 0$$

De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4\sqrt{x}e^{x/2}}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}dt = 0$ car l'intégrale converge en 0. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$.
Comme la fonction est croissante, elle est toujours positive sur $]0,+\infty[$ car par théorème de la limite monotone, $\lim\limits_{x\to 0^+} \Phi(x) = \inf\{\Phi(x)\ ,\ x > 0\}$.

Q.7 Pour $x > 0$, f admet 0 comme limite en 0 :

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|\,dt \leqslant C\int_0^x \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\,dt \leqslant \frac{4C\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{x+1}$$

La dernière inégalité découlant de la question précédente.

Q.8 On pose $h : x \mapsto f(x)^2 \frac{e^{-x}}{x}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$. La majoration obtenue à la question précédente permet d'obtenir que pour $x > 0$,

$$0 \leqslant \frac{f^2(x)e^{-x}}{x} \leqslant \frac{16C^2}{(1+x)^2}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car continue en 0 et équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Il en découle immédiatement l'intégrabilité de h, d'où $f \in E$.

II - Structure préhilbertienne de E

Q.9 Soit f, g des éléments de E, la fonction $h : t \mapsto \frac{f(t)g(t)e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
En utilisant que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$

On peut écrire :

$$|h(t)| = \left|\frac{f(t)g(t)e^{-t}}{t}\right| = \left|\frac{f(t)e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\right|\left|\frac{g(t)e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{f^2(t)e^{-t}}{t} + \frac{g^2(t)e^{-t}}{t}\right]$$

La fonction de droite étant intégrable comme somme de fonctions intégrables, la fonction h est intégrable.

Q.10 On voit que E est non vide car il contient la fonction nulle et qu'il est contenu dans l'ensemble des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ qui est un espace vectoriel.
Si on prend $(f, g) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(\lambda f(t) + g(t))^2 e^{-t}}{t} = \lambda^2 \frac{f^2(t)e^{-t}}{t} + \frac{g^2(t)e^{-t}}{t} + 2\lambda \frac{f(t)g(t)e^{-t}}{t}$$

En utilisant la question précédente, on obtient que les trois fonctions du terme de droite sont intégrables sur $]0, +\infty[$, il en découle $(\lambda f + g) \in E$.
Finalement E est donc un sous espace vectoriel.

Q.11 L'intégrale qui définit ce produit scalaire est bien définie d'après la question Q9.
Vérifions les axiomes des produits scalaires :

- Comme le produit des réels est commutatif, pour tout $f, g \in E, \langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle$
- Pour f, g, h dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale

  $$\langle \lambda f + g|h\rangle = \lambda\langle f|h\rangle + \langle g|h\rangle$$

  La linéarité à droite s'en déduit par symétrie
- Pour $f \in E$, $\langle f|f\rangle \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
- Soit $f \in E$ telle que $\langle f|f\rangle = 0$. Comme $t \mapsto \dfrac{f^2(t)e^{-t}}{t}$ est positive et continue, elle est identiquement nulle. On en déduit que $f = \tilde{0}$ puisque $t \mapsto e^{-t}$ ne s'annule pas.

C'est donc un produit scalaire.

Q.12 On veut montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \|k_x\| = 0$. Il suffit de montrer que

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} k_x^2(t)\frac{e^{-t}}{t}dt = 0$$

Appliquons pour cela la version continue du théorème de convergence dominée.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, pour $x \leqslant t$, $k_x(t) = e^x - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que

  $$\lim_{x\to 0} k_x^2(t)\frac{e^{-t}}{t} = 0$$

- Domination au voisinage de 0. Pour $x \in]0, 1]$ et $t \in]0, +\infty[$, $\min(x, t) \leqslant \min(1, t)$ donc $k_x(t) \leqslant k_1(t)$.
  On en déduit que

  $$\left|k_x^2(t)\frac{e^{-t}}{t}\right| \leqslant k_1^2(t)\frac{e^{-t}}{t} =: \varphi(t)$$

  où $\varphi \in L^1(]0, +\infty[)$ d'après la question Q5.

Par la version continue du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} k_x^2(t)\frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^{+\infty} 0\, dt = 0$$

Q.13 Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $t^k e^{-t} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$. On en déduit que $t \mapsto t^k e^{-t}$ et donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$ converge. Notons I_k sa valeur.
On sait que $I_0 = 1$ et que pour $k \geqslant 0$, par intégration par parties,

$$I_k = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{k+1}\int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t}\, dt = \frac{1}{k+1} I_{k+1}$$

où le crochet converge et vaut 0 car $t^{k+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Cela donne que $I_{k+1} = (k+1)I_k$. Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

Q.14 Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\langle p_n, p_m\rangle = \int_0^{+\infty} t^{n+m}\frac{e^{-t}}{t}\, dt = I_{n+m-1} = (n+m-1)! \neq 0$$

La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas orthogonale.

III - Un opérateur sur E

III.A

Q.15 Soit $x > 0$ En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$0 \leqslant |U(f)(x)| \leqslant |\langle k_x, f\rangle| \leqslant \|k_x\|\|f\|$$

Il suffit d'utiliser la question Q12 pour obtenir que $\lim\limits_{x\to 0^+} U(f)(x) = 0$.

Q.16 Soit $x > 0$, par relation de Chasles

$$\begin{aligned}
U(f)(x) &= \int_0^x (e^t - 1)\frac{f(t)e^{-t}}{t}\, dt + \int_x^{+\infty} (e^x - 1)\frac{f(t)e^{-t}}{t}\, dt \\
&= \int_0^x (1 - e^{-t})\frac{f(t)}{t}\, dt + (e^x - 1)\int_x^{+\infty} \frac{f(t)e^{-t}}{t}\, dt
\end{aligned}$$

Q.17 Comme f est continue, par le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x (1 - e^{-t})\frac{f(t)}{t}\, dt$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)e^{-t}}{t}\, dt$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\begin{aligned}
(U(f))'(x) &= \frac{(1-e^{-x})f(x)}{x} + e^x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)e^{-t}}{t}\, dt - (e^x - 1)\frac{f(x)e^{-x}}{x} \\
&= e^x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)e^{-t}}{t}\, dt
\end{aligned}$$

Q.18 En utilisant encore le théorème fondamental de l'analyse, $U(f)'$ est de classe $\mathscr{C}^1$ donc $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$U(f)''(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)e^{-t}}{t}\, dt - e^x\frac{f(x)e^{-x}}{x} = U(f)'(x) - \frac{f(x)}{x}$$

La fonction $U(f)$ est solution de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) = -\frac{f(x)}{x}$$

Q.19 Soit $x > 0$, par inégalité triangulaire,

$$|U(f)'(x)| = \left| e^x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)e^{-t}}{t}\, dt \right| \leqslant e^x \int_x^{+\infty} \left| \frac{f(t)e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} \right| \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\, dt$$

En utilisant alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'ensemble des fonctions de carré intégrables sur $[x, +\infty[$ muni du produit scalaire

$$(g, h) \mapsto \int_x^{+\infty} g(t)h(t)\, dt$$

on obtient alors

$$|U(f)'(x)| \leqslant e^x \left(\int_x^{+\infty} \frac{f^2(t)e^{-t}}{t}\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant e^x \left(\int_0^{+\infty} \frac{f^2(t)e^{-t}}{t}\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a bien $|U(f)'(x)| \leqslant e^x \|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \right)^{1/2}$.

De plus pour $t \in [x, +\infty[$, $\frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{e^{-t}}{x}$ donc

$$e^x \|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \right)^{1/2} \leqslant e^x \|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\, dt \right)^{1/2} = \frac{e^x \|f\|}{\sqrt{x}} (e^{-x})^{1/2} = \|f\| \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$$

Q.20 L'application U est linéaire par linéarité de l'intégrale. De plus, en utilisant la question Q15 et la question Q19 on est en mesure d'appliquer le résultat de la question Q8 avec $C = \|f\|$. Cela montre que $U(f) \in E$ et donc U est un endomorphisme (la continuité de $U(f)$ étant acquise car elle est de classe $\mathscr{C}^1$ d'après la question Q17.

En utilisant aussi les résultats de la question Q7 on a que pour $x > 0$,

$$|U(f)(x)| \leqslant 4\|f\| \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$$

Q.21 En utilisant le résultat précédent,

$$\begin{aligned} \|U(f)\|^2 &= \int_0^{+\infty} \frac{(U(f)(t))^2 e^{-t}}{t}\, dt \leqslant 16\|f\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{te^t}{(1+t)^2} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \\ &= 16\|f\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\, dt = 16\|f\|^2 \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^{+\infty} = 16\|f\|^2 \end{aligned}$$

Finalement $\|U(f)\| \leqslant 4\|f\|$.

Q.22 Soit $f \in \mathrm{Ker}(U)$. Comme $U(f) = \tilde{0}$, $U''(f) = \tilde{0}$. En utilisant l'équation différentielle de la question Q18, on obtient que $f = \tilde{0}$. On en déduit que U est injective.

Q.23 D'après la question Q17, pour toute fonction f, $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Or il existe des fonctions dans E qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$ par exemple la fonction constante égale à 0 sur $]0, 1[\cup]3, +\infty[$, affine sur $]1, 2]$ et $[2, 3]$ et valant 1 en 2. Cela montre que U n'est pas surjective.

III.B

Q.24 On a vu que $U(f)$ était de classe $\mathscr{C}^2$. La foncton F est donc de classe $\mathscr{C}^1$. Il suffit alors de dériver F et d'utiliser l'équation différentielle vérifiée par $U(f)$ obtenue à la question Q18.

Q.25 Pour $x > 0$,

$$\begin{array}{rcl} |F(x)U(g)(x)| & = & |U(f)'(x)e^{-x}U(g)(x)| \\ & \leqslant & \|f\|\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}e^{-x}4\|g\|\dfrac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x} \quad \text{d'après Q19 et Q20} \\ & \leqslant & 4\dfrac{\|f\|\,\|g\|}{1+x} \end{array}$$

Q.26 En utilisant la première majoration dans la question Q19 on a

$$|F(x)| \leqslant \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Or, pour $x \in]0,1[$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \leqslant \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = -\ln(x) + e^{-1}$$

Q.27 La majoration dans la question Q24 donne directement

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)U(g)(x) = 0$$

Sur $]0,1[$, en utilisant les majorations des questions Q26 (pour F) et Q20 (pour $U(g)$),

$$|F(x)U(g)(x)| \leqslant 4\|f\|\|g\|\left(\sqrt{x}e^{-1} - x\ln(x)\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x+1} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

Q.28 On a

$$\langle f|U(g)\rangle = \int_0^{+\infty} U(g)(t)\left(\frac{f(t)e^{-t}}{t}\right)\,dt = \int_0^{+\infty} U(g)(t)F'(t)\,dt$$

On effectue une intégration par parties. La question précédente permet de voir que le crochet converge et vaut 0 donc :

$$\langle f|U(g)\rangle = -\int_0^{+\infty} U(g)'(t)F(t)\,dt = \int_0^{+\infty} U(g)'(t)U(f)'(t)e^{-t}\,dt$$

Q.29 Par symétrie du produit scalaire :

$$\langle U(f)|g\rangle = \langle g|U(f)\rangle = \int_0^{+\infty} U(g)'(t)U(f)'(t)e^{-t}\,dt = \langle f|U(g)\rangle$$

IV - Solutions d'une équation différentielle développables en série entière

Q.30 f une solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_p).
On peut dériver terme à terme à tout ordre sur $]-R,R[=]-\infty,\infty[$ et ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1},\quad f''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad x\big(f''(x)-f'(x)\big)+pf(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[n(n+1)a_{n+1}-(n-p)a_n\right]x^n$$

Si f vérifie (E_p) alors par unicité du développement en série entière de la fonction nulle on a :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad n(n+1)a_{n+1}-(n-p)a_n=0}$$

En particulier $pa_0=0$ donc $\boxed{a_0=0}$ car $p\neq 0$.
Réciproquement si ces relations sont vérifiées alors f vérifie (E_p).

Q.31 Soit h est une solution polynomiale non nulle de (E_p). Alors h est développable en série entière et il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que : $a_n\neq 0=a_{n+1}$, car si pour un entier k, $a_k=0$ on a $a_m=0$, $\forall m\geqslant k$ d'après Q30).
(où les a_k sont les coefficients du développement en série entière de h)
En utilisant la relation $n(n+1)a_{n+1}=(n-p)a_n$, on trouve $\boxed{p=n=deg(P)\in\mathbb{N}^*}$.
Réciproquement, si $p\in\mathbb{N}^*$, on peut construire une solution polynomiale non nulle de (E_p) en utilisant la relation de récurrence de la question Q.30 (avec a_1 non nul quelconque).
De plus par la question Q 2), toute restriction à $\mathbb{R}_+^*$ d'une fonction polynomiale appartient à E.

Q.32 Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,
$h(x)=e^{-x}P(x)$, $\quad h'(x)=-e^{-x}P(x)+e^{-x}P'(x)$, $\quad h''(x)=e^{-x}P(x)-2e^{-x}P'(x)+e^{-x}P''(x)$

$$\boxed{x\big(h''(x)+h'(x)\big)+ph(x)=\big(x(P''(x)-P'(x))+pP(x)\big)e^{-x}=0}$$

Q.33 On écrit $P(x)=\sum_{k=1}^{p}a_kx^k$, $h(x)=P(x)e^{-x}$.
h est le produit de deux sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, elle est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Q.34 Pour tout $n\geqslant 2$, $b_n=-\frac{n+p-1}{n(n-1)}b_{n-1}$ donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad b_n=\left(-\frac{n+p-1}{(n-1)n}\right)\dots\left(-\frac{p+1}{1.2}\right)b_1=\boxed{(-1)^{n-1}\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!n!p!}b_1}$$

Q.35 La fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on multiplie juste par x^{p-1} et on trouve : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g_p(x) = x^{p-1}e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+p-1}}{n!}$

En dérivant terme à terme : $g_p^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+p-1)\cdots n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!n!} x^{n-1}$

D'où $x g_p^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$

avec $c_n = (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!n!}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = -\frac{c_n}{p!} b_1$ donc pour tout $x > 0$,

$$h(x) = C x g_p^{(p)}(x)$$

$$P(x) = C e^x x g_p^{(p)}(x)$$

avec $\boxed{C = -\frac{b_1}{p!}}$

Q.36 On prend juste $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ quelconque, et on construit la suite $(a_n)_n$ par la relation de récurrence définie dans la question Q.30, la somme de la série entière est une solution de l'équation.

Comme $p \notin \mathbb{N}$, on a alors $a_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$, et $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|n-p|}{n(n+1)} \sim \frac{n}{n^2} \to 0$, donc par la règle de d'Alembert, $\boxed{\text{le rayon de convergence est } +\infty}$.

Q.37 Pour $n > p$,

$(n+1)\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-p}{n} \to 1$

En appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on établit l'existence d'un entier $q > p$ tel que

$$\boxed{\forall n \geqslant q \quad (n+1)\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geqslant 1 - \left|1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right| \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$$

Q.38 Pour tout $n \geqslant q$,

$$\boxed{|a_n| \geqslant \frac{1}{2n} \cdots \frac{1}{2(q+1)} |a_q| = \frac{q!}{2^{n-q} n!} |a_q|}$$

Q.39 Pour tout $x \geqslant 0$

$$\psi(x) = \sum_{n=q}^{+\infty} |a_n| x^n \geqslant K \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = K\left(e^{\frac{x}{2}} - R(x)\right)$$

avec $K = 2^q |a_q| q! > 0$ et $R(x) = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{x^n}{2^n n!}$

$$\frac{\psi^2(x) e^{-x}}{x} \geqslant \frac{K^2}{x}\left(1 - e^{-\frac{x}{2}} R(x)\right)^2 \sim_{+\infty} \frac{K^2}{x}$$

car $e^{-x/2} R(x) = O_\infty(e^{-x/2} x^{q-1}) = o_\infty(1)$.

La fonction $x \mapsto \frac{K^2}{x}$ est positive et n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty[$, donc $x \mapsto \frac{\psi^2(x)e^{-x}}{x}$ ne l'est pas non plus.

Donc $\boxed{\psi \notin E}$.

Q.40 La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{q-1} a_n x^n$ appartient à E par Q2). De plus par $Q30$ les a_n sont tous de même signe à partir du rang q donc $\psi : x \mapsto \sum_{n=q}^{\infty} a_n x^n$ ou $\psi : x \mapsto -\sum_{n=q}^{\infty} a_n x^n$
Si f appartenait à E alors ψ appartiendrait aussi à E comme différence ou somme d'éléments de E.
Donc $\boxed{f \notin E}$.

V - Éléments propres de U

Q.41 Par Q22), U est injectif. $\boxed{\text{0 n'est donc pas une valeur propre de } U}$.

Q.42 Soient λ une valeur propre de U, et f un vecteur propre associé, $U(f) = \lambda f$. D'après la question Q.18, $U(f)$ est solution de l'équation : $y'' - y' = -\frac{f(x)}{x}$
On a donc : $\lambda f'' - \lambda f' = -\frac{f(x)}{x}$ et ainsi $\boxed{\forall x > 0 \quad x(f''(x) - f'(x)) + \dfrac{1}{\lambda} f(x) = 0}$

Q.43 Soit λ une valeur propre de U et soit f un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
f est donc solution non nulle de l'équation $(E_{\frac{1}{\lambda}})$, et $f \in E$.
L'énoncé semble admettre (c'est mal formulé, il eut fallu écrire “on admet que” et non “on suppose que”) que f est alors somme sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une série entière de rayon de convergence infini.
D'après la question Q40), $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{N}^*$ donc $\boxed{\lambda = \frac{1}{p} \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*}$

Q.44 P est une solution de $(E_p) : x(P'' - P') + pP = 0$.
$U(P)$ vérifie l'équation : $y'' - y' = -\frac{P(x)}{x}$ donc P vérifie $x(U(P)'' - U(P)') + P = 0$
$\boxed{\text{Posant } T = pU(P) - P \text{ on a : } T'' - T' = p(U(P)'' - U(P)') - (P'' - P') = 0}$

Q.45 En gardant les notations de la question précédente : $T'' - T' = 0$
L'équation caractéristique est : $r^2 - r = 0$, on a deux racines réelles distinctes 0 et 1 donc

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad pU(P)(x) - P(x) = T(x) = ae^x + b$$

P et $U(P)$ sont dans E qui est stable par combinaison linéaire (Q.10). D'après la question Q.3, on doit avoir $a = b = 0$.
Donc $T = 0$ et ainsi $\boxed{U(P) = \dfrac{1}{p} P}$
P est donc un $\boxed{\text{vecteur propre}}$ de U.

Q.46 On prend deux entiers non nuls p, q distincts.
Par la question Q35), P_p vérifie (E_p), donc par la question Q45), P_p est vecteur propre de U associé à p. Idem *mut. mut.* pour P_q.
$U(P_p) = \frac{1}{p} P_p$, $U(P_q) = \frac{1}{q} P_q$
En utilisant la question Q.29 : $\left\langle \frac{1}{p} P_p, P_q \right\rangle = \langle U(P_p), P_q \rangle = \langle P_p, U(P_q) \rangle = \left\langle P_p, \frac{1}{q} P_q \right\rangle$
On trouve : $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \langle P_p, P_q \rangle = 0$ donc $\boxed{\langle P_p, P_q \rangle = 0}$ car $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \neq 0$.