

I. Préliminaires

I.A - Projection sur un convexe fermé

Q 1. On a $\|a + b\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle$

donc $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle$ et de même $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle$

Par somme, on a l'identité du parallélogramme : $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$

Géométriquement, dans un parallélogramme $(ABCD)$ (i.e. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$), on a

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

Q 2. On suppose que u, v et v' dans E vérifient $v \neq v'$ et $\|u - v\| = \|u - v'\|$.

On a $2 \left\| u - \frac{v + v'}{2} \right\| = \|u - v + u - v'\|$

En appliquant la question précédente on a $\|(u-v) + (u-v')\|^2 + \|v' - v\|^2 = 2(\|u - v\|^2 + \|u - v'\|^2) = 4\|u - v\|^2$

Comme $v \neq v'$, on a $\|v' - v\|^2 > 0$

donc $\|(u - v) + (u - v')\| < 2\|u - v\|$ car $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+

En divisant par 2, on a alors $\left\| u - \frac{v + v'}{2} \right\| < \|u - v\|$

Q 3. Admis

Q 4. On suppose que C est un convexe fermé non vide de E et u est un vecteur de E .

L'existence voulue est établie en **Q3**.

Par l'absurde s'il existait $v \neq v'$ dans C tels que $\forall w \in C, \|u - v\| \leq \|u - w\|$ et $\forall w \in C, \|u - v'\| \leq \|u - w\|$

On aurait alors $\|u - v\| = \|u - v'\|$, et on pourrait appliquer **Q2**,

ainsi $\left\| u - \frac{v + v'}{2} \right\| < \|u - v\|$ or $\frac{v + v'}{2} \in C$ car C est convexe

ceci est en contradiction avec $\forall w \in C, \|u - v\| \leq \|u - w\|$

On a établi qu'il existe un unique v dans C tel que $\forall w \in C, \|u - v\| \leq \|u - w\|$

I.B - Inégalité de Hölder pour l'espérance

Visiblement, on suppose que pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie au moins sur \mathbb{R}^+ et s'annule en 0

Q 5. Soit deux réels positifs a et b .

Si a ou b est nul alors $ab = 0 \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$.

Sinon, on a $\frac{1}{p} \in [0, 1]$ et par concavité du logarithme sur $]0, +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{p} \ln(a^p) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b^q\right)$$

d'où $\ln(a \times b) \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$

Comme \exp est croissante, on peut conclure que dans tous les cas : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$

Q 6. On remarque que comme l'univers est fini, les variables aléatoires admettent des moments à tout ordre.

Par positivité de l'espérance, on a : $\mathbf{E}(|X|^p) \geq 0$ et $\mathbf{E}(|Y|^q) \geq 0$

Premier cas : On suppose que $\mathbf{E}(|X|^p) = \mathbf{E}(|Y|^q) = 1$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $|X(\omega)Y(\omega)| \leq \frac{|X(\omega)|^p}{p} + \frac{|Y(\omega)|^q}{q}$ d'après la question précédente

donc $|XY| \leq \frac{1}{p}|X|^p + \frac{1}{q}|Y|^q$

d'où $\mathbf{E}(|XY|) \leq \frac{1}{p}\mathbf{E}(|X|^p) + \frac{1}{q}\mathbf{E}(|Y|^q)$ par croissance et linéarité de l'espérance

donc $\mathbf{E}(|XY|) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \mathbf{E}(|X|^p)\mathbf{E}(|Y|^q)$

Deuxième cas : On suppose que $\mathbf{E}(|X|^p) > 0$ et $\mathbf{E}(|Y|^q) > 0$

Je note $\lambda = \mathbf{E}(|X|^p)$, $X' = \frac{1}{\lambda^{1/p}}X$, $\mu = \mathbf{E}(|Y|^q)$ et $Y' = \frac{1}{\mu^{1/q}}Y$

Ainsi on a $\mathbf{E}(|X'|^p) = \mathbf{E}(|Y'|^q) = 1$ et on peut appliquer le premier cas à X' et Y' donc

$$\mathbf{E}(|X'Y'|) \leq \mathbf{E}(|X'|^p)\mathbf{E}(|Y'|^q) \text{ et ainsi } \mathbf{E}\left(\left|\frac{XY}{\lambda^{1/p}\mu^{1/q}}\right|\right) \leq 1$$

ce qui donne $\mathbf{E}(|XY|) \leq \lambda^{1/p}\mu^{1/q} = \mathbf{E}(|X|^p)^{1/p}\mathbf{E}(|Y|^q)^{1/q}$

Troisième cas : On suppose que $\mathbf{E}(|X|^p) = 0$ ou $\mathbf{E}(|Y|^q) = 0$.

Sans perte de généralité, traitons le cas $\mathbf{E}(|X|^p) = 0$.

Alors $\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^p \mathbf{P}(X = x) = 0$ selon la formule du transfert

Comme il s'agit d'une somme finie de réels positifs, on a $\forall x \in X(\Omega) \setminus \{0\}, \mathbf{P}(X = x) = 0$

donc X est nulle presque sûrement donc il en est de même pour XY et aussi pour $|XY|$

d'où $\mathbf{E}(|XY|) = 0 = \mathbf{E}(|X|^p)^{1/p}\mathbf{E}(|Y|^q)^{1/q}$

$\mathbf{E}(|XY|) \leq \mathbf{E}(|X|^p)^{1/p}\mathbf{E}(|Y|^q)^{1/q}$

Conclusion : Dans tous les cas, on a $\boxed{\mathbf{E}(|XY|) \leq \mathbf{E}(|X|^p)^{1/p}\mathbf{E}(|Y|^q)^{1/q}}$

I.C - Espérance conditionnelle

Q 7. On a $\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbf{P}(X = x)$ or selon la formule des probabilités totales avec

(A_1, \dots, A_m) un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a $\forall x \in X(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(X = x) = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}_{A_i}(X = x) \cdot \mathbf{P}(A_i)$$

$$\text{donc } \mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{i=1}^m x \cdot \mathbf{P}_{A_i}(X = x) \cdot \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}(A_i) \cdot \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbf{P}_{A_i}(X = x)$$

$$\text{ce qui permet de conclure : } \boxed{\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{E}(X|A_i)}$$

I.D - Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Q 8. Notons $X^2(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ où $0 \leq y_1 < \dots < y_n$. Pour simplifier les notations, on pose aussi $y_0 = 0$.

On remarque pour commencer que la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $t \mapsto t\mathbf{P}(|X| \geq t)$ est une fonction en escalier car elle est constante sur tout intervalle de la forme $]\sqrt{y_{i-1}}, \sqrt{y_i}]$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Elle est de plus nulle sur $]\sqrt{y_n}, +\infty[$. On en déduit que l'intégrale du terme de droite est une intégrale convergente.

De plus, par relation de Chasles,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} t\mathbf{P}(|X| \geq t) dt &= \sum_{i=1}^n 2 \int_{\sqrt{y_{i-1}}}^{\sqrt{y_i}} t\mathbf{P}(|X| \geq t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n 2\mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_i}) \int_{\sqrt{y_{i-1}}}^{\sqrt{y_i}} t dt \end{aligned}$$

La deuxième égalité venant du fait que $t \mapsto \mathbf{P}(|X| \geq t)$ est constante égale à $\mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_i})$ sur $]\sqrt{y_{i-1}}, y_i]$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} t \mathbf{P}(|X| \geq t) dt &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_i})(y_i - y_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_i}) - \sum_{i=0}^{n-1} y_i \mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_{i+1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} y_i [\mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_i}) - \mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_{i+1}})] + y_n \mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_n}) \end{aligned}$$

Or $\mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_i}) - \mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_{i+1}}) = \mathbf{P}(|X| = \sqrt{y_i})$ et $\mathbf{P}(|X| \geq \sqrt{y_n}) = \mathbf{P}(|X| = \sqrt{y_n})$ donc

$$2 \int_0^{+\infty} t \mathbf{P}(|X| \geq t) dt = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{P}(|X| = \sqrt{y_i}) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{P}(X^2 = y_i) = \mathbf{E}(X^2)$$

Q 9. La fonction $t \mapsto at \exp(-bt^2)$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ (1)

$$\text{Soit } A > 0. \text{ On a } 2 \int_0^A at \exp(-bt^2) dt = \left[\frac{a}{-b} \exp(-bt^2) \right]_{t=0}^{t=A} = -\frac{a}{b} \exp(-bA^2) + \frac{a}{b}$$

$$\text{Ainsi } \int_0^A at \exp(-bt^2) dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{a}{2b}$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t \mapsto at \exp(-bt^2)$ sur $[0, +\infty[$ avec (1)

De plus $\forall t \geq 0, t \mathbf{P}(|X| \geq t) \leq at \exp(-bt^2)$

$$\text{d'où } \mathbf{E}(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} t \mathbf{P}(|X| \geq t) dt \leq 2 \int_0^{+\infty} at \exp(-bt^2) dt = \frac{a}{b}$$

Q 10. Soit $t \in \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

On a $|x + \delta| \geq |x| + |\delta|$ selon l'inégalité triangulaire

ce qui permet de conclure que $\mathbf{P}(|X + \delta| \geq t) \leq \mathbf{P}(|X| \geq t - |\delta|)$

Q 11. Soit $t \in \mathbf{R}$. On a

$$a - \frac{t^2 b}{2} - (-b(t - |\delta|)^2) = \frac{t^2 b}{2} - 2b|\delta|t + a + b\delta^2 = b \frac{(t - 2|\delta|)^2}{2} + a - b\delta^2 \geq 0$$

$$\text{comme } b|\delta|^2 \leq a, \text{ ceci prouve } -b(t - |\delta|)^2 \leq a - \frac{t^2 b}{2}$$

Q 12. Soit $t \in \mathbf{R}$ tel que $t \geq |\delta|$.

En servant de Q10. puis de l'hypothèse en I.D car $t - |\delta| \geq 0$, on a

$$\mathbf{P}(|X + \delta| \geq t) \leq \mathbf{P}(|X| \geq t - |\delta|) \leq a \exp(-b(t - |\delta|)^2)$$

Puis en utilisant la croissance de l'exponentielle et Q11.,

$$\text{on obtient : } \mathbf{P}(|X + \delta| \geq t) \leq a \exp(a - bt^2/2) = a \exp(a) \exp(-\frac{1}{2}bt^2)$$

Q 13. Si $0 \leq t < |\delta|$, on a $t^2 \leq \delta^2 \leq \frac{a}{b}$

$$\text{donc } -\frac{1}{2}bt^2 \geq -\frac{a}{2} \text{ et } a \exp(a) \exp(-\frac{1}{2}bt^2) \geq a \exp(a) \exp(-\frac{a}{2}) = a \exp(\frac{a}{2})$$

D'après l'inégalité sous-gaussienne en $t = 0$, on a $1 = \mathbf{P}(|X| \geq 0) \leq a \exp(0) = a$

d'où $a \exp(a) \exp(-\frac{1}{2}bt^2) \geq 1 \exp(1/2) \geq 1 \geq \mathbf{P}(|X + \delta| \geq t)$

On a justifié que l'inégalité de **Q12** reste valable si $0 \leq t < |\delta|$

II. L'inégalité de concentration de Talagrand

II.A - Étude de deux cas particuliers

Q 14. On suppose que C est un convexe fermé ne rencontrant pas $X(\Omega)$ alors $(X \in C)$ est l'événement impossible

$$\text{ainsi dans ce cas on a } \boxed{\mathbf{P}(X \in C) \cdot \mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) = 0 \leq 1}$$

Q 15. Je note $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ où les u_i sont les coordonnées de u dans la base (e_1, \dots, e_n)

Pour $\omega \in \Omega$, on a par calcul dans une base orthonormée :

$$\frac{1}{4} d(X(\omega), u)^2 = \frac{\|X(\omega) - u\|^2}{4} = \sum_{i=1}^n \frac{(\varepsilon_i(\omega) - u_i)^2}{4}$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, je note $Y_i = \frac{(\varepsilon_i - u_i)^2}{4}$

Comme $u_i \in \{-1, 1\}$ et que ε_i est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, alors Y_i est à valeurs dans $\{0, 1\}$

De plus $(Y_i = 0) = (\varepsilon_i = u_i)$ et donc $\mathbf{P}(Y_i = 0) = \frac{1}{2}$. Ainsi $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$.

De plus $\frac{1}{4} d(X(\omega), u)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i$ et les Y_i sont indépendantes par lemme des coalitions.

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\frac{1}{4} d(X, u)^2 \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } 1/2}$

Q 16. D'après ce qui précède $\frac{1}{4} d(X, u)^2$ est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$

$$\text{et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P} \left(\frac{1}{4} d(X, u)^2 = k \right) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

En utilisant la formule de transfert avec $\exp \left(\frac{1}{8} d(X, u)^2 \right) = \exp \left(\frac{1}{2} (d(X, u)^2 / 4) \right)$:

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, u)^2 \right) \right) = \sum_{k=0}^n \exp(k/2) \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\sqrt{e}}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k}$$

donc selon le binôme de Newton : $\boxed{\mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, u)^2 \right) \right) = \left(\frac{\sqrt{e} + 1}{2} \right)^n}$

Comme $e \leq 3 \leq 9$, on a $0 \leq \frac{\sqrt{e} + 1}{2} \leq 2$ et donc $\boxed{\mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, u)^2 \right) \right) \leq 2^n}$

Q 17. On a $\boxed{d(X, C) = \inf_{v \in C} d(X, v) \leq d(X, u)}$

De plus comme $X(\Omega) \cap C = \{u\}$, on a $(X \in C) = (X = u) = \bigcap_{i=1}^n (\varepsilon_i = u_i)$ en reprenant les notations de Q14.

Donc par indépendance mutuelle des ε_i , on a

$$\mathbf{P}(X \in C) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(\varepsilon_i = u_i) = \frac{1}{2^n}$$

Comme les facteurs sont positifs et à l'aide de la question Q 16, on a $\mathbf{P}(X \in C) \cdot \mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq 1$

$\boxed{\text{On a bien l'inégalité (II.1) dans ce cas}}$

II.B - Initialisation

- Q 18.** Pour le cas $n = 1$, j'identifie E à \mathbf{R} et X à ε_1 qui suit donc une loi de Rademacher
On a donc $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et comme $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments
alors $X(\Omega) = \{-1, 1\} = C \cap X(\Omega) \subset C$ et donc $(X \in C) = \Omega$ est l'événement certain
d'où $d(X, C)$ vaut certainement 0 et donc $(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2))$ est constante égale 1
d'où $\boxed{\text{pour } n = 1, \text{ on a } \mathbf{P}(X \in C) \cdot \mathbf{E}(\exp(\frac{1}{8}d(X, C)^2)) = 1 \times 1 = 1 \leq 1 \text{ selon Attila}}$

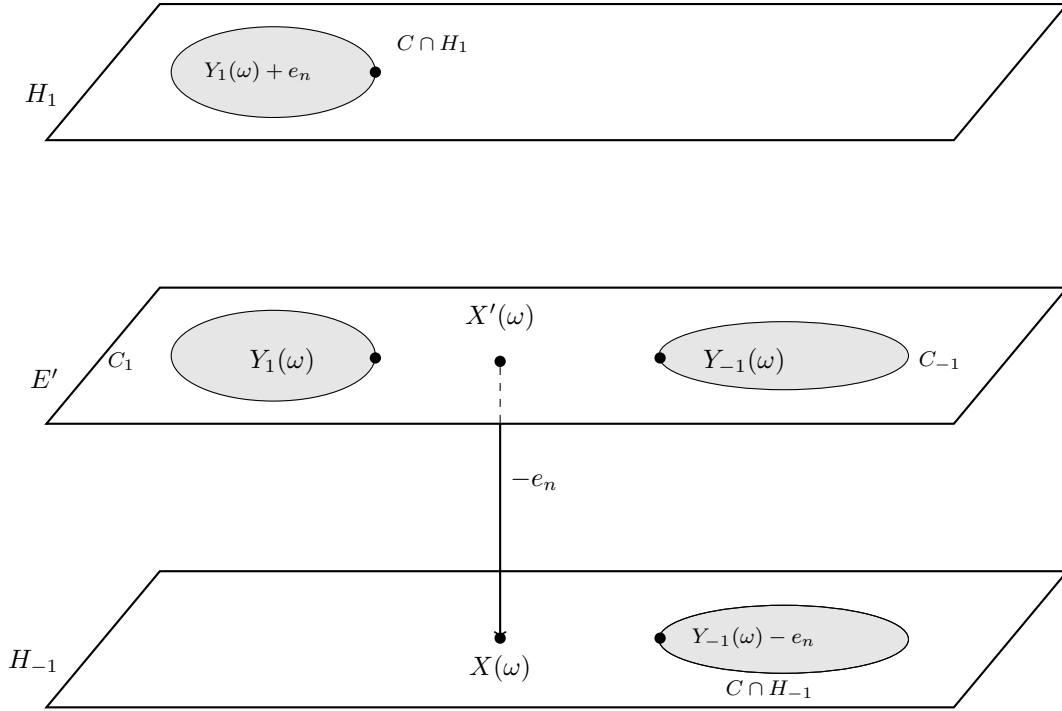


Illustration dans le cas où $\varepsilon_n = -1$

- Q 19.** Soit $x' \in E'$ et $t \in \{1, -1\}$.
 \Leftarrow : On suppose que : $x' + te_n \in C$. On a donc $x' + te_n \in C \cap H_t$ car $x' \in E'$.
Comme π est une projection et que $x' \in E' = \text{Im}(\pi)$, on a $\pi(x') = x'$
et que $\text{Ker}(\pi) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})^\perp = \text{Vect}(e_n)$, on a $\pi(e_n) = 0$
Par linéarité $\pi(x' + te_n) = x'$ d'où $x' \in \pi(C \cap H_t) = C_t$
 \Rightarrow : On suppose que : $x' \in C_t = \pi(C \cap H_t)$. Ceci nous fournit $y \in C \cap H_t$ tel que $x' = \pi(y)$
On écrit $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ où les $y_i \in \mathbb{R}$ On a donc $x' = \pi(y) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i$
et comme $y \in H_t$, on a $y - te_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + (y_n - t)e_n \in E'$
donc $(y_n - t)e_n \in E'$ puis $y_n = t$
et ainsi $x' + te_n = y \in C$

Conclusion : on a bien : $\boxed{x' \in C_t \iff x' + te_n \in C}$

- Q 20.** $C_t \subset E'$: Par définition, on a $C_1 \subset \text{Im}(\pi) = E'$. De même pour C_{-1}
 $C_t \neq \emptyset$: Par hypothèse, $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux vecteurs qui diffèrent par leur dernière coordonnée.

Ceci nous fournit $y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + e_n \in C \cap X(\Omega)$ et $z = \sum_{i=1}^{n-1} z_i e_i - e_n \in C \cap X(\Omega)$ où les y_i et les z_i sont réels.

On note $y' = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i$ et $z' = \sum_{i=1}^{n-1} z_i e_i$ et on a $y' \in E'$ et $z' \in E'$

En utilisant la réciproque de la question précédente, on a $y' \in C_{+1}$ et $z' \in C_{-1}$
Donc $C_{+1} \neq \emptyset$ et $C_{-1} \neq \emptyset$

C_t convexe : Établissons que C_{+1} est convexe et ce sera analogue pour C_{-1}

Soit $x, y \in C_{+1}$. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Montrons $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_{+1}$.

On a x et $y \in E'$ donc $\lambda x + (1 - \lambda)y \in E'$ car E' est un sous-espace vectoriel

De plus $\lambda x + (1 - \lambda)y + e_n = \lambda(x + e_n) + (1 - \lambda)(y + e_n)$

Or en utilisant le sens direct de Q19., on a $x + e_n \in C$ et $y + e_n \in C$

Comme C est convexe, on a donc $\lambda x + (1 - \lambda)y + e_n \in C$

d'où $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_1$ par la réciproque de Q19.

C_t fermé : Établissons que C_{+1} est fermé de E' et ce sera analogue pour C_{-1} .

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans C_{+1} qui converge vers $\ell \in E'$. Montrons que $\ell \in C_{+1}$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a comme ci-dessus $u_k + e_n \in C$

or par somme $(x_k + e_n)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell + e_n$.

Comme C est fermé de E , on a $\ell + e_n \in C$,

comme $\ell \in E'$, on a bien $\ell \in C_{+1}$ d'après Q19.

Conclusion : On a bien C_{+1} et C_{-1} sont des convexes fermés non vides de E'

Q 21. $(\varepsilon_n = 1)$ et $(\varepsilon_n = -1)$ forment un système complet d'événements de probabilités 1/2 donc selon la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(X \in C, \varepsilon_n = 1) + \mathbb{P}(X \in C, \varepsilon_n = -1)$$

Soit $\omega \in \Omega$. Soit $t \in \{-1, 1\}$.

On a $X(\omega) = X'(\omega) + \varepsilon_n(\omega)e_n$ et $X'(\omega) \in E'$ et $\varepsilon_n(\omega) \in \{-1, 1\}$ donc d'après Q19 :

$$\begin{cases} X(\omega) \in C \\ \varepsilon_n(\omega) = t \end{cases} \iff \begin{cases} X'(\omega) \in C_t \\ \varepsilon_n(\omega) = t \end{cases}$$

Ainsi $\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(X' \in C_{+1}, \varepsilon_n = 1) + \mathbb{P}(X' \in C_{-1}, \varepsilon_n = -1)$

Or $X' = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$ et ε_n sont des variables aléatoires indépendantes par le lemme des coalitions. D'où

$$\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(X' \in C_{+1}) \cdot \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) + \mathbb{P}(X' \in C_{-1}) \cdot \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1)$$

On a donc bien $\mathbb{P}(X \in C) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{-1})$

II.D - Une inégalité cruciale

Q 22. Soit $\omega \in \Omega$. On a $Y_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) \in C_{\varepsilon_n(\omega)}$

donc $Y_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) + \varepsilon_n e_n(\omega) \in C$ d'après Q19. et de même $Y_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \varepsilon_n e_n(\omega) \in C$ donc

$$(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) + \varepsilon_n e_n(\omega)) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \varepsilon_n e_n(\omega)) \in C$$

car C convexe et $\lambda \in [0, 1]$ d'où

$$d(X(\omega), C) \leq \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) + \varepsilon_n e_n(\omega)) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \varepsilon_n e_n(\omega)) - X(\omega)\|$$

On a bien montré $d(X, C) \leq \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|$

Q 23. On a $X = X' + \varepsilon_n e_n$ donc $(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X = (1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X' - 2\varepsilon_n e_n)$

ainsi $(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X = (1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X') - 2\lambda\varepsilon_n e_n$

La variable aléatoire $2\lambda\varepsilon_n e_n$ est à valeurs dans $\text{Vect}(e_n)$ et $(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')$ à valeurs dans E'

or $E' \perp \text{Vect}(e_n)$ et $\|e_n\| = 1$ donc selon le théorème de Pythagore

$$\|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|^2 = 4\lambda^2 + \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2$$

on en déduit avec la question précédente que

$$d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2$$

Soit u et $v \in E$. Montrons $\forall t \in [0, 1]$, $(1 - t)\|u\|^2 + t\|v\|^2 \geq \|(1 - t)u + tv\|^2$

Je pose $P : t \mapsto (1 - t)\|u\|^2 + t\|v\|^2 - \|(1 - t)u + tv\|^2$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $P(t) = ((1 - t) - (1 - t)^2)\|u\|^2 + (t - t^2)\|v\|^2 - 2t(1 - t)\langle u, v \rangle$

donc $P(t) = t(1 - t)[\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle] = t(1 - t)\|u - v\|^2$

d'où $\forall t \in [0, 1]$, $P(t) \geq 0$ d'où le résultat.

En appliquant ceci à $t = \lambda$, $u = Y_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - X'(\omega)$ et $v = Y_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - X'(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$ on obtient :

$$d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 \leq 4\lambda^2 + (1 - \lambda)\|Y_{\varepsilon_n} - X'\|^2 + \lambda\|Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$$

Ainsi, on a montré l'inégalité $\boxed{d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + (1 - \lambda)d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \lambda d(X', C_{-\varepsilon_n})^2}$

II.E - Espérances conditionnelles

Q 24. Comme $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux vecteurs qui diffèrent par leur dernière coordonnée,

ceci nous fournit $x' = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \in E'$ tel que $\{x' + e_n, x' - e_n\} \subset C \cap X(\Omega)$

Ainsi d'après Q19., $x' \in C_{-1}$ et donc $(X' = x') \subset (X' \in C_{-1})$

or $(X' = x') = \bigcap_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_i = x_i)$ donc par indépendance des ε_i on a

$$\mathbb{P}(X' = x') = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\varepsilon_i = x_i) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

et donc $\mathbb{P}(X' \in C_{-1}) \geq \mathbb{P}(X' = x') > 0$ d'où $\boxed{p_- > 0}$

Q 25. Lemme 1 : Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, $f : \mathbb{R} \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(Y = k) > 0$. On a :

$$\mathbb{E}(f(X, Y) | Y = k) = \mathbb{E}(f(X, k) | Y = k)$$

Par transfert (toutes les sommes sont à support fini),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X, Y) | Y = k) &= \sum_{x, y \in \mathbb{R}} f(x, y) \mathbb{P}_{(Y=k)}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x, y \in \mathbb{R}} f(x, y) \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y, Y = k)}{\mathbb{P}(Y = k)} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x, k) \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = k)}{\mathbb{P}(Y = k)} = \mathbb{E}(f(X, k) | Y = k) \end{aligned}$$

car pour $y \neq k$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y, Y = k) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Lemme 2 : Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et $k \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(Y = k) > 0$. On a :

$$\mathbb{E}(X | Y = k) = \mathbb{E}(X)$$

Il suffit d'utiliser la définition de l'espérance conditionnelle et de remarquer que $\mathbb{P}_{(Y=k)}(X = x) = \mathbb{P}(X = x)$

Soit λ dans $[0, 1]$. On a d'après Q23. :

$$\exp\left(\frac{d(X, C)^2}{8}\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \left(\exp\left(\frac{d(X', C_{\varepsilon_n})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\frac{d(X', C_{-\varepsilon_n})^2}{8}\right)\right)^\lambda \quad (*)$$

D'après le lemme 1 : $\mathbb{E} \left(\left(\exp\left(\frac{d(X', C_{\varepsilon_n})^2}{8}\right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\frac{d(X', C_{-\varepsilon_n})^2}{8}\right) \right)^\lambda \mid \varepsilon_n = -1 \right) =$
 \dots

$$\dots \mathbb{E} \left(\left(\exp\left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8}\right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right) \right)^\lambda \mid \varepsilon_n = -1 \right)$$

Avec le lemme des coalitions, les variables aléatoires ε_n et $\left(\exp\left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right)\right)^\lambda$ sont indépendantes car ε_n et de X' le sont ; puis le lemme 2 donne :

$$\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8}\right)^{1-\lambda} \exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right)^\lambda \mid \varepsilon_n = -1 \right) = \mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8}\right)^{1-\lambda} \exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right)^\lambda \right)$$

À l'aide de (*), de la croissance et la linéarité de l'espérance conditionnelle, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X, C)^2}{8}\right) \mid \varepsilon_n = -1 \right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \mathbb{E} \left(\left(\exp\left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8}\right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right) \right)^\lambda \right)}$$

Q 26. On suppose $\lambda \in]0, 1[$. On pose $p = \frac{1}{1-\lambda}$ et $q = \frac{1}{\lambda}$ de sorte que $p > 0, q > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

D'après Q6, pour Y et Z variables positives, on a $Y^{1/p} = |Y^{1/p}|$ et $Z^{1/q} = |Z^{1/q}|$:

$$\mathbb{E} \left(Y^{1/p} Z^{1/q} \right) \leq \mathbb{E} \left(\left(Y^{1/p} \right)^p \right)^{1/p} \mathbb{E} \left(\left(Z^{1/q} \right)^q \right)^{1/q} = \mathbb{E} (Y)^{1/p} \mathbb{E} (Z)^{1/q}$$

donc

$$\mathbb{E} \left(Y^{1-\lambda} Z^\lambda \right) \leq \mathbb{E} (Y)^{1-\lambda} \mathbb{E} (Z)^\lambda$$

En appliquant ceci au résultat de Q25., on obtient pour tout $\lambda \in]0, 1[$:

$$\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X, C)^2}{8}\right) \mid \varepsilon_n = -1 \right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \left(\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8}\right) \right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left(\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right) \right) \right)^\lambda$$

or $\lambda \mapsto \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \left(\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8}\right) \right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left(\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right) \right) \right)^\lambda$ est continue sur $[0, 1]$

On déduit en passant à la limite en 0 et 1 que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\boxed{\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X, C)^2}{8}\right) \mid \varepsilon_n = -1 \right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \left(\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8}\right) \right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left(\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right) \right) \right)^\lambda}$$

Q 27. On utilise la question précédente en $\lambda = 0$, on échange $+1$ et -1 qui jouent des rôles symétriques. puis on multiplie par $p_+ \geq 0$ pour obtenir :

$$p_+ \cdot \mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X, C)^2}{8}\right) \mid \varepsilon_n = 1 \right) \leq p_+ \cdot \mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right) \right)$$

$$\text{On a donc } p_+ \cdot \mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right) \right) = \mathbb{P}(X' \in C_1) \cdot \mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right) \right)$$

or $X' = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$ est à valeurs dans l'espace euclidien E' de dimension $n-1$ de base ortho-normée (e_1, \dots, e_{n-1}) , C_1 est un convexe fermé non vide de E' et les ε_i sont indépendantes et suivent la loi de Rademacher d'où par hypothèse de récurrence, on peut appliquer (II.1) :

$$p_+ \cdot \left(\mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{d(X', C_1)^2}{8}\right) \right) \right) \leq 1$$

Enfin comme $p_+ > 0$ selon Q24. (p_+ et p_- jouant des rôles symétriques), on a alors

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \middle| \varepsilon_n = 1 \right) \leq \frac{1}{p_+}$$

Q 28. On utilise la formule des probabilités totales sur les espérances conditionnelles de Q7. avec le système complet d'événements : $(\varepsilon_n = t)_{t \in \{-1, 1\}}$ de probabilités $1/2$ qui est non nulle : donc

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \middle| \varepsilon_n = 1 \right) + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \middle| \varepsilon_n = -1 \right)$$

Soit λ dans $[0, 1]$. On applique les deux questions précédentes :

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_+} + \exp \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) \left(\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8} \right) \right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left(\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{d(X', C_1)^2}{8} \right) \right) \right) \right)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence comme à la question précédente on a :

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8} \right) \right) \leq \frac{1}{p_-} \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{d(X', C_1)^2}{8} \right) \right) \leq \frac{1}{p_+}$$

On en déduit que pour tout λ dans $[0, 1]$: $\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_+} + \exp \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) \frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{(p_+)^{\lambda}} \right)$

II.F - Optimisation

Q 29. Quitte à remplacer e_n par $-e_n$, on peut supposer que $0 < p_- \leq p_+$. On a alors $\lambda = 1 - \frac{p_-}{p_+} \in [0, 1]$ donc d'après Q28 :

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq \frac{1}{2p_+} \left(1 + \exp \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) \left(\frac{p_+}{p_-} \right)^{1-\lambda} \right)$$

$$\text{or } (1 - \lambda)^{\lambda-1} = \left(\frac{p_-}{p_+} \right)^{\lambda-1} = \left(\frac{p_+}{p_-} \right)^{1-\lambda}$$

$$\text{Ainsi on a bien } \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq \frac{1}{2p_+} \left(1 + \exp \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) (1 - \lambda)^{\lambda-1} \right)$$

Q 30. Je pose $g : x \mapsto \ln(2+x) - \ln(2-x) - \frac{x^2}{2} - (x-1)\ln(1-x)$ qui est \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1[$ par théorèmes généraux.

$$\text{Soit } x \in [0, 1[, \text{ on a } g'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} - x - 1 - \ln(1-x)$$

$$\text{et } g''(x) = \frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2} - 1 + \frac{1}{1-x} = \frac{8x}{(2-x)^2(2+x)^2} + \frac{x}{1-x} \geq 0$$

ainsi g' est croissante sur $[0, 1[$

De plus $g'(0) = 0$ donc $\forall x \in [0, 1[, g'(x) \geq 0$.

d'où g est croissante sur $[0, 1[$ et comme $g(0) = 0$, on a $\forall x \in [0, 1[, g(x) \geq 0$.

On a montré que pour tout $x \in [0, 1[, \frac{x^2}{2} + (x-1)\ln(1-x) \leq \ln(2+x) - \ln(2-x)$

Q 31. Soit $x \in [0, 1[$. En appliquant l'exponentielle à l'inégalité précédente, on obtient :

$$\exp \left(\frac{x^2}{2} \right) (1-x)^{x-1} \leq \frac{2+x}{2-x}$$

$$\text{d'où } \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{x^2}{2} \right) (1-x)^{x-1} \right) \leq \frac{4}{2-x}$$

Q 32. En utilisant la question précédente et Q29., et comme $\lambda \in [0, 1[$ car $\lambda = 1 - \frac{p_-}{p_+}$ et $0 < p_- \leq p_+$, on a :

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq \frac{1}{2p_+} \frac{4}{2 - \lambda}$$

Or $p_+(2 - \lambda) = p_+ \left(1 + \frac{p_-}{p_+} \right) = p_+ + p_-$ d'où

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq \frac{2}{p_+ + p_-}$$

donc comme $\frac{2}{p_+ + p_-} > 0$, on a $\frac{p_+ + p_-}{2} \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq 1$

À l'aide de la question 21, par définition de p_+ et p_- , on a :

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq 1 \quad (\text{II.1})$$

on vient de terminer l'hérédité (commencée en IIC) de notre démonstration par récurrence dans le cas où $C \cap X(\omega)$ contient au moins deux éléments, mais la formule reste vraie si $C \cap X(\omega)$ a au plus un élément d'après IIA (Q14-17).

De plus l'initialisation (le cas où la dimension est 1) a été traitée en IIA ou IIB(Q-18) selon le cardinal de $C \cap X(\omega)$. Ainsi l'inégalité (II.1) a été démontrée par récurrence

II.G - Inégalité de Talagrand

Q 33. Soit C convexe fermé non vide de E et t réel strictement positif. D'après ce qui précède on a

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{d(X, C)^2}{8} \right) \right) \leq 1 \quad (\text{II.1})$$

or par croissance sur \mathbb{R}^+ de $x \mapsto \exp \left(\frac{x^2}{8} \right)$, on a :

$$\mathbb{P}(d(X, C) \geq t) = \mathbb{P} \left(\exp \left(\frac{d(X, C)^2}{8} \right) \geq \exp \left(\frac{t^2}{8} \right) \right)$$

En appliquant Markov avec la variable aléatoire positive $\exp \left(\frac{d(X, C)^2}{8} \right)$ et $\exp \left(\frac{t^2}{8} \right) > 0$ on a :

$$\exp \left(\frac{t^2}{8} \right) \cdot \mathbb{P}(d(X, C) \geq t) \leq \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{d(X, C)^2}{8} \right) \right)$$

donc $\mathbb{P}(X \in C) \cdot \exp \left(\frac{t^2}{8} \right) \cdot \mathbb{P}(d(X, C) \geq t) \leq \mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{d(X, C)^2}{8} \right) \right) \leq 1$

On en déduit l'inégalité de Talagrand :

Pour tout C convexe fermé non vide de E et pour tout réel t strictement positif

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}(d(X, C) \geq t) \leq \exp \left(-\frac{t^2}{8} \right)$$

III. Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

III.A - Une inégalité de concentration

Q 34. Fermée L'application $M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \mapsto M \cdot u$ est linéaire donc continue car $\dim(\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})) = kd < \infty$. Donc par composition g est continue sur $\mathcal{M}_{k,d}$. Or $[0, r]$ est une partie fermée de \mathbb{R} donc $C = g^{-1}([0, r])$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$

Convexe Soit M et $N \in C$. Soit $\lambda \in [0, 1]$.

À l'aide de l'inégalité triangulaire et l'homogénéité, on a
 $g(\lambda M + (1-\lambda)N) = \|\lambda M \cdot u + (1-\lambda)N \cdot u\| \leq \lambda \|M \cdot u\| + (1-\lambda) \|N \cdot u\| \leq (\lambda + 1 - \lambda)r = r$
d'où $\lambda M + (1-\lambda)N \in C$

On a bien montré que $C = \{M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \mid g(M) \leq r\}$ est une partie convexe et fermée de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$

Q 35. Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d}}$ dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.

$$\text{On a } \|M \cdot u\|^2 = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^d m_{i,j} u_j \right)^2 = \sum_{i=1}^k \left| \sum_{j=1}^d m_{i,j} u_j \right|^2$$

On applique k fois Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^d , ce qui donne :

$$\|M \cdot u\|^2 \leq \sum_{i=1}^k \left(\left(\sum_{j=1}^d m_{i,j}^2 \right) \times \left(\sum_{j=1}^d u_j^2 \right) \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^d m_{i,j}^2$$

$$\text{car } \sum_{j=1}^d u_j^2 = \|u\|^2 = 1$$

Ce qui permet de conclure que $\|M \cdot u\| \leq \|M\|_F$

Q 36. Soit M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ telle que $d(M, C) < t$

On a $0 \in C$ donc selon Q34., C est une partie fermée convexe non vide de l'espace euclidien $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$

Ceci nous fournit donc $V \in C$ tel que $d(M, C) = \|M - V\|_F$ et donc $\|M - V\|_F < t$

On a $g(M) = \|M \cdot u\| = \|(M - V) \cdot u + V \cdot u\| \leq \|(M - V) \cdot u\| + \|V \cdot u\|$

Ainsi selon l'inégalité triangulaire et la question précédente : $g(M) \leq \|M - V\|_F + r$ car $V \in C$

d'où $g(M) < r + t$

Ainsi $\boxed{\text{pour toute matrice } M \text{ dans } \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}), d(M, C) < t \Rightarrow g(M) < r + t}$

Q 37. On peut appliquer le théorème de Talagrand avec l'espace euclidien $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ de dimension kd muni de la base canonique orthonormée $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d}}$, la variable $X = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d}} \varepsilon_{i,j} E_{i,j}$ où les

$\varepsilon_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes suivant une loi de Rademacher et C convexe fermé non vide de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}(d(X, C) \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Or $(X \in C) = (g(X) \leq r)$ par définition de C et $(g(X) \geq r + t) \subset (d(X, C) \geq t)$ par contraposée de Q36.

$$\text{On en déduit que } \boxed{\mathbb{P}(g(X) \leq r) \cdot \mathbb{P}(g(X) \geq r + t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)}$$

III.B - Médianes

Q 38. Comme Ω est fini, $g(X)$ prend un nombre fini de valeurs,

on peut alors noter $g(X) = \{y_1, \dots, y_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1 < \dots < y_n$.

Posons $S_k = \mathbb{P}(g(X) \leq y_k) = \mathbb{P}(g(X) = y_1) + \dots + \mathbb{P}(g(X) = y_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
(avec la convention $y_0 = -\infty$)

On a $0 = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_n = 1$.

Soit $k_0 = \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid S_k \geq \frac{1}{2}\}$ (comme $S_n = 1$, cet ensemble est une partie non vide de \mathbb{N}^*) Alors $S_{k_0-1} < \frac{1}{2} \leq S_{k_0}$ (y compris si $k_0 = 1$).

Ainsi $\mathbb{P}(g(X) \leq y_{k_0}) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(g(X) \leq y_{k_0}) = \mathbb{P}(g(X) = y_{k_0}) + \dots + \mathbb{P}(g(X) = y_n) = 1 - S_{k_0-1} > \frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{y_{k_0} \text{ est une médiane de } g(X).}$

Q 39. Soit $t > 0$. En appliquant Q37. à $r = m$ puis $r = m - t$, on a :

$$\mathbb{P}(g(X) \leq m) \cdot \mathbb{P}(g(X) \geq m+t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right) \text{ et } \mathbb{P}(g(X) \leq m-t) \cdot \mathbb{P}(g(X) \geq m) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Puis à l'aide de la question précédente et par somme

$$\mathbb{P}(g(X) \geq m+t) + \mathbb{P}(g(X) \leq m-t) \leq 4 \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Comme $(|g(x) - m| \geq t) = (g(X) \geq m+t) \cup (g(X) \leq m-t)$ (union disjointe)

On a $\mathbb{P}(|g(x) - m| \geq t) \leq 4 \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$ où m est une médiane de $g(X)$

Q 40. La variable aléatoire réelle $g(X) - m$ vérifie les hypothèse du I.D, en prenant $a = 4$ et $b = 1/8$

À l'aide de Q9., on déduit que $\mathbb{E}((g(X) - m)^2) \leq 32$

Q 41. On a $g(X)^2 = \|Xu\|^2 = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^d \varepsilon_{i,j} u_j \right)^2$

À $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$ fixé, on a

$$\left(\sum_{j=1}^d \varepsilon_{i,j} u_j \right)^2 = \sum_{j=1}^d \varepsilon_{i,j}^2 u_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < \ell \leq d} \varepsilon_{i,j} u_j \varepsilon_{i,\ell} u_\ell$$

La variable $\varepsilon_{i,j}^2$ est constante égale à 1 pour tout j et pour $\ell \neq j$, on a par indépendance et linéarité :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_{i,j} u_j \varepsilon_{i,\ell} u_\ell) = u_i u_\ell \mathbb{E}(\varepsilon_{i,j}) \mathbb{E}(\varepsilon_{i,\ell}) = 0$$

(loi de Rademacher)

Donc $\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^d \varepsilon_{i,j} u_j \right)^2 = \sum_{j=1}^d u_j^2 = \|u\|^2 = 1$ Par somme on peut conclure que $\mathbb{E}(g(X)^2) = k$

On applique Q6 à $g(X) = |g(X)|$ et $Y = 1$ et $p = q = 2$ pour obtenir $\mathbb{E}(g(X)) \leq \sqrt{k}$

On aurait pu faire appel à Cauchy-Schwarz.

Q 42. Par linéarité et espérance de constante puis en utilisant la question précédente car $m \geq 0$ car $\mathbb{P}(g(X) \geq 0) = 1$

$$\mathbb{E}((g(X) - m)^2) = \mathbb{E}((g(X)^2) - 2m\mathbb{E}(g(X)) + m^2) \geq \mathbb{E}((g(X)^2) - 2m\sqrt{k} + m^2)$$

On en déduit que $(\sqrt{k} - m)^2 \leq \mathbb{E}((g(X) - m)^2)$

III.C - Un lemme-clé

Q 43. On sait déjà que $g(X) - m$ est à queue sous-gaussienne avec $a = 4$ et $b = 1/8$

On a $(g(X) - \sqrt{k}) = (g(X) - m + m - \sqrt{k})$

Je pose alors $\delta = m - \sqrt{k}$ et ainsi $\delta^2 = (m - \sqrt{k})^2 \leq 32 = \frac{a}{b}$ d'après Q40. et Q42.

On a bien $0 \leq |\delta| \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$. On peut donc utiliser Q12. et Q13.,

pour conclure que $\mathbb{P}(|g(X) - \sqrt{k}| \geq t) \leq 4 \exp(4) \exp\left(-\frac{1}{16} t^2\right)$

Q 44. On a $(\|A_k u\| - 1) > \varepsilon = (\|X \cdot u\| - \sqrt{k}) > \varepsilon \sqrt{k} \subset (|g(X) - \sqrt{k}| \geq \varepsilon \sqrt{k})$ ainsi en utilisant la question précédente avec $t = \varepsilon \sqrt{k} > 0$ on a

$$\mathbb{P}(\|A_k u\| - 1 > \varepsilon) \leq 4 \exp(4) \exp\left(-\frac{1}{16} k \varepsilon^2\right)$$

Comme $k \geq 160 \frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2} > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|\|A_k u\| - 1| > \varepsilon) \leq 4 \exp(4) \exp(10 \ln(\delta)) = 4 \exp(4) \delta^{10} \leq \frac{4 \exp(4)}{2^9} \delta = \frac{\exp(4)}{2^7} \delta$$

À l'aide la calculatrice : $\frac{\exp(4)}{2^7} > 1$ donc pour tout vecteur unitaire u dans \mathbb{R}^d : $\boxed{\mathbb{P}(|\|A_k u\| - 1| > \varepsilon) < \delta}$

III.D - Conclusion

Q 45. On applique Q45. avec $u = \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|}$ pour obtenir $\boxed{\mathbb{P}(\overline{E_{i,j}}) < \delta}$

Q 46. On a : $\mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \overline{E_{i,j}}\right) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{P}(\overline{E_{i,j}}) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta = \frac{N(N-1)}{2} \delta$

En passant à l'événement contraire on obtient $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j}\right) \geq 1 - \frac{N(N-1)}{2} \delta}$

Q 47. Je pose alors $c = 320 > 0$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Soit N et d entiers ≥ 2 . Soit v_1, \dots, v_N distincts dans \mathbb{R}^d .

Je prends $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq c \frac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$ Je choisis $\delta = \frac{1}{N^2} \in]0, 1/2[$ de sorte que $k \geq 160 \frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$

On a alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j}\right) > 0$ donc $\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j} \neq \emptyset$

Ce qui donne une matrice A_k qui donne f qui convient D'où le théorème de Johnson et Lindenstrauss.