

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.*

*Quand on utilise un résultat précédemment démontré, il faut citer explicitement le numéro de la question.*

## Notations

- Dans tout le problème,  $N, k$  et  $d$  désignent des entiers supérieurs ou égaux à deux.
- Pour tous entiers naturels  $p$  et  $q$ , avec  $p \leq q$ , la notation  $\llbracket p, q \rrbracket$  désigne l'ensemble  $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leq i \leq q\}$ .
- Dans tout le problème, on note  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé **fini**. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur  $\Omega$ .
- Pour tout événement  $A$  de probabilité non nulle, et pour tout événement  $B$ , on note  $\mathbf{P}_A(B)$  ou  $\mathbf{P}(B|A)$  la probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$ .
- Étant donnée une variable aléatoire  $Z$  à valeurs réelles, on note  $\mathbf{E}(Z)$  son espérance.
- On dit qu'une variable aléatoire  $Z$  est une variable de Rademacher lorsque  $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$  et

$$\mathbf{P}(Z = 1) = \mathbf{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$$

- De façon générale, si  $E$  est un espace euclidien, son produit scalaire et sa norme seront respectivement notés  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et  $\|\cdot\|$ . Ces notations seront utilisées notamment pour  $\mathbf{R}^d$  et  $\mathbf{R}^k$ , munis de leurs structures euclidiennes canoniques.
- Soit  $C$  une partie d'un espace vectoriel  $E$ . Elle est dite convexe si

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in C$$

## Problématique

On s'intéresse à la question suivante : étant donnés  $N$  points dans un espace euclidien de grande dimension, est-il possible de les envoyer linéairement dans un espace de petite dimension sans trop modifier les distances entre ces points ?

Pour préciser cette question, considérons  $N$  vecteurs distincts  $v_1, \dots, v_N$  dans  $\mathbf{R}^d$ . Pour tout réel  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < 1$ , on dit qu'une application linéaire  $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^k$  est une  $\varepsilon$ -isométrie pour  $v_1, \dots, v_N$  lorsque :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, (1 - \varepsilon) \|v_i - v_j\| \leq \|f(v_i) - f(v_j)\| \leq (1 + \varepsilon) \|v_i - v_j\|$$

La question peut se reformuler ainsi :

### Objectif

Pour quelles valeurs de  $k$  existe-t-il  $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^k$  qui soit une  $\varepsilon$ -isométrie pour  $v_1, \dots, v_N$  ?

On se propose d'établir le théorème suivant, démontré par William B. Johnson et Joram Lindenstrauss en 1984 :

Il existe une constante absolue  $c$  strictement positive telle que :

quels que soient  $N$  et  $d$  entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et quels que soient  $v_1, \dots, v_N$  distincts dans  $\mathbf{R}^d$ , il suffit que

$$k \geq c \frac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$$

pour qu'il existe une  $\varepsilon$ -isométrie  $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^k$  pour  $v_1, \dots, v_N$ .

Les seules méthodes connues à ce jour pour démontrer ce résultat sont de nature probabiliste. Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires portant sur la convexité et les probabilités. La partie II est consacrée à la démonstration d'une inégalité de concentration, qui est utilisée dans la partie III où le théorème de Johnson-Lindenstrauss est démontré.

# I. Préliminaires

## I.A - Projection sur un convexe fermé

Soit  $E$  un espace euclidien.

**Q 1.** Soient  $a$  et  $b$  dans  $E$ . Montrer la relation suivante et en donner une interprétation géométrique :

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

**Q 2.** En déduire que si  $u, v$  et  $v'$  dans  $E$  vérifient  $v \neq v'$  et  $\|u - v\| = \|u - v'\|$  alors

$$\left\| u - \frac{v + v'}{2} \right\| < \|u - v\|$$

**Q 3 (admise)** Soient  $F$  un fermé non vide de  $E$  et  $u$  dans  $E$ . **On admet** qu'il existe  $v$  dans  $F$  tel que

$$\forall w \in F, \|u - v\| \leq \|u - w\|$$

**Q 4.** En déduire que si  $C$  est un convexe fermé non vide de  $E$  et  $u$  est un vecteur de  $E$  alors il existe un unique  $v$  dans  $C$  tel que

$$\forall w \in C, \|u - v\| \leq \|u - w\|$$

On dira que  $v$  est le projeté de  $u$  sur  $C$  et on notera  $d(u, C) = \|u - v\|$ .

## I.B - Inégalité de Hölder pour l'espérance

Soient  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Q 5.** Montrer que, pour tous réels positifs  $a$  et  $b$ ,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

On pourra utiliser la concavité du logarithme.

**Q 6.** En déduire que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  alors

$$\mathbf{E}(|XY|) \leq \mathbf{E}(|X|^p)^{1/p} \mathbf{E}(|Y|^q)^{1/q}$$

On pourra d'abord montrer ce résultat lorsque  $\mathbf{E}(|X|^p) = \mathbf{E}(|Y|^q) = 1$ .

## I.C - Espérance conditionnelle

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  une variable aléatoire à valeurs réelles.

Pour tout événement  $A \subset \Omega$  de probabilité non nulle, l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $A$ , notée  $\mathbf{E}(X|A)$ , est par définition le réel

$$\mathbf{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}_A(X = x) \cdot x$$

En d'autres termes,  $\mathbf{E}(X|A)$  est l'espérance de  $X$  dans l'espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_A)$ .

Les propriétés usuelles de linéarité et positivité de l'espérance, qu'on ne demande pas de redémontrer, sont ainsi valables pour l'espérance conditionnelle sachant  $A$ .

**Q 7.** Soit  $(A_1, \dots, A_m)$  un système complet d'événements de probabilités non nulles. Montrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{E}(X|A_i)$$

### I.D - Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  une variable aléatoire réelle.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel positif  $t$ ,

$$\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq a \exp(-bt^2)$$

**Q 8.** Montrer que

$$\mathbf{E}(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} t \mathbf{P}(|X| \geq t) dt$$

On pourra noter  $X^2(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$  avec  $0 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n$ .

**Q 9.** Montrer que le moment d'ordre deux de  $X$  est inférieur ou égal à  $\frac{a}{b}$ .

Soit  $\delta$  un réel tel que  $0 \leq |\delta| \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$ .

**Q 10.** Justifier que, pour tout réel  $t$ ,

$$\mathbf{P}(|X + \delta| \geq t) \leq \mathbf{P}(|X| \geq t - |\delta|)$$

**Q 11.** Montrer que, pour tout réel  $t$ ,

$$-b(t - |\delta|)^2 \leq a - \frac{t^2 b}{2}$$

**Q 12.** En déduire que pour tout réel  $t$  tel que  $t \geq |\delta|$  on a

$$\mathbf{P}(|X + \delta| \geq t) \leq a \exp(a) \exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right)$$

**Q 13.** Justifier que l'inégalité précédente reste valable si  $0 \leq t < |\delta|$ .

## II. L'inégalité de concentration de Talagrand

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$  muni d'une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Soient  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$  des variables de Rademacher indépendantes.

On pose  $X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i$ .

L'objectif de cette partie est de montrer, pour tout convexe fermé non vide  $C$  de  $E$ ,

$$\mathbf{P}(X \in C) \cdot \mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq 1 \quad (\text{II.1})$$

### II.A - Étude de deux cas particuliers

**Q 14.** Traiter le cas où  $C$  est un convexe fermé ne rencontrant pas  $X(\Omega)$ .

On suppose dans la suite de cette sous-partie II.A uniquement, que  $C$  est un convexe fermé de  $E$  qui rencontre  $X(\Omega)$  en un seul vecteur  $u$ .

**Q 15.** Montrer que  $\frac{1}{4}d(X, u)^2$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $1/2$ .

**Q 16.** En déduire l'espérance de  $\exp\left(\frac{1}{8}d(X, u)^2\right)$  et montrer qu'elle est inférieure ou égale à  $2^n$ .

**Q 17.** Justifier que  $d(X, C) \leq d(X, u)$  et en déduire l'inégalité (II.1) dans ce cas.

### II.B - Initialisation

On suppose désormais que  $C$  est un convexe fermé de  $E$  tel que  $C \cap X(\Omega)$  contient au moins deux éléments. Quitte à permutez les vecteurs de la base, on peut supposer que ces deux vecteurs diffèrent par leur dernière coordonnée.

On se propose de démontrer l'inégalité (II.1) par récurrence sur la dimension  $n$  de  $E$ .

**Q 18.** Traiter le cas  $n = 1$ .

## II.C - Propriétés

Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$ . On suppose à présent que (II.1) est vérifiée au rang  $n - 1$ . On note  $E' = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$  et  $\pi$  la projection orthogonale sur  $E'$

$$\pi : \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$$

On pose  $X' = \pi \circ X = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$ . C'est une variable aléatoire à valeurs dans  $E'$ .

Pour  $t \in \{-1, 1\}$  on note

- $H_t$  l'hyperplan affine  $E' + te_n$  ;
- $C_t = \pi(C \cap H_t)$ .

**Q 19.** Montrer, pour  $x' \in E'$  et  $t \in \{1, -1\}$ , que  $x' \in C_t \iff x' + te_n \in C$

**Q 20.** Montrer que  $C_{+1}$  et  $C_{-1}$  sont des convexes fermés non vides de  $E'$ .

Pour  $t \in \{-1, 1\}$ , on note  $Y_t$  le projeté de  $X'$  sur le convexe fermé non vide  $C_t$ . C'est une variable aléatoire à valeurs dans  $E'$ .

**Q 21.** Montrer que

$$\mathbf{P}(X \in C) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(X' \in C_{+1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(X' \in C_{-1})$$

## II.D - Une inégalité cruciale

Soit  $\lambda$  un réel tel que  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

**Q 22.** Montrer que

$$d(X, C) \leq \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|$$

**Q 23.** En déduire que

$$d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2$$

puis que

$$d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + (1 - \lambda)\|Y_{\varepsilon_n} - X'\|^2 + \lambda\|Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$$

Ainsi, on a montré l'inégalité

$$d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + (1 - \lambda)d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \lambda d(X', C_{-\varepsilon_n})^2$$

## II.E - Espérances conditionnelles

On note

$$p_+ = \mathbf{P}(X' \in C_{+1}) \text{ et } p_- = \mathbf{P}(X' \in C_{-1})$$

On va supposer, sans perte de généralité, que  $p_+ \geq p_-$ .

**Q 24.** Montrer que  $p_- > 0$ .

**Q 25.** Montrer que pour tout  $\lambda$  dans  $[0, 1]$

$$\mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{d(X, C)^2}{8} \right) \mid \varepsilon_n = -1 \right) \leq \exp \left( \frac{\lambda^2}{2} \right) \mathbf{E} \left( \left( \exp \left( \frac{d(X', C_{-1})^2}{8} \right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left( \exp \left( \frac{d(X', C_1)^2}{8} \right) \right)^\lambda \right)$$

**Q 26.** En déduire que

$$\mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{d(X, C)^2}{8} \right) \mid \varepsilon_n = -1 \right) \leq \exp \left( \frac{\lambda^2}{2} \right) \left( \mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{d(X', C_{-1})^2}{8} \right) \right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left( \mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{d(X', C_1)^2}{8} \right) \right) \right)^\lambda$$

**Q 27.** À l'aide de l'hypothèse de récurrence, justifier que

$$\mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \mid \varepsilon_n = 1 \right) \leq \frac{1}{p_+}$$

**Q 28.** Déduire de ce qui précède que pour tout  $\lambda$  dans  $[0, 1]$ ,

$$\mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p_+} + \exp \left( \frac{\lambda^2}{2} \right) \frac{1}{p_-^{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{p_+^\lambda} \right)$$

## II.F - Optimisation

**Q 29.** On pose  $\lambda = 1 - \frac{p_-}{p_+}$ . Montrer que

$$\mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq \frac{1}{2p^+} \left( 1 + \exp \left( \frac{\lambda^2}{2} \right) (1 - \lambda)^{\lambda-1} \right)$$

**Q 30.** Montrer que pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$\frac{x^2}{2} + (x - 1) \ln(1 - x) \leq \ln(2 + x) - \ln(2 - x)$$

On pourra faire une étude de fonction.

**Q 31.** En déduire que pour tout  $x \in [0, 1[$

$$1 + \exp \left( \frac{x^2}{2} \right) (1 - x)^{x-1} \leq \frac{4}{2 - x}$$

**Q 32.** Terminer la démonstration de l'inégalité (II.1).

## II.G - Inégalité de Talagrand

**Q 33.** En déduire l'inégalité de Talagrand :

Pour tout  $C$  convexe fermé non vide de  $E$  et pour tout réel  $t$  strictement positif

$$\mathbf{P}(X \in C) \cdot \mathbf{P}(d(X, C) \geq t) \leq \exp \left( -\frac{t^2}{8} \right)$$

## III. Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

Dans cette partie on considère l'espace  $E = \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$  muni du produit scalaire défini par

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad \langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top \cdot B)$$

On notera  $\| \cdot \|_F$  la norme euclidienne associée.

On rappelle que  $\mathbf{R}^d$  et  $\mathbf{R}^k$  sont munis des normes euclidiennes canoniques, notées indistinctement  $\| \cdot \|$ .

On identifie  $\mathbf{R}^d$  à  $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbf{R})$  de sorte qu'un vecteur quelconque  $x = (x_1, \dots, x_d)$  peut être identifié à la matrice colonne  $(x_1 \ \dots \ x_d)^\top$ .

On fixe un vecteur  $(u_1, \dots, u_d)$  dans  $\mathbf{R}^d$ , identifié comme ci-dessus à la colonne  $(u_1 \ \dots \ u_d)^\top$  de  $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbf{R})$ , et tel que  $\|u\| = 1$ . On définit l'application

$$g : M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R}) \mapsto \|M \cdot u\| \in \mathbf{R}$$

Soit  $X = (\varepsilon_{i,j})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d}$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$  ; dont les coefficients  $\varepsilon_{i,j}$  sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes.

### III.A - Une inégalité de concentration

Soit  $r$  un réel.

**Q 34.** Montrer que  $C = \{M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R}) \mid g(M) \leq r\}$  est une partie convexe et fermée de  $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$ .

**Q 35.** Montrer que pour toute matrice  $M$  dans  $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$  :  $\|M \cdot u\| \leq \|M\|_F$ .

Soit  $t > 0$ .

**Q 36.** Montrer que pour toute matrice  $M$  dans  $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$ ,

$$d(M, C) < t \Rightarrow g(M) < r + t$$

**Q 37.** En déduire que

$$\mathbf{P}(g(X) \leq r) \cdot \mathbf{P}(g(X) \geq r + t) \leq \exp \left( -\frac{t^2}{8} \right)$$

### III.B - Médianes

On dit qu'un réel  $m$  est une médiane de  $g(X)$  lorsque

$$\mathbf{P}(g(X) \geq m) \geq \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{P}(g(X) \leq m) \geq \frac{1}{2}$$

**Q 38.** Justifier que  $g(X)$  admet au moins une médiane.

**Q 39.** Déduire de ce qui précède que, pour tout réel strictement positif  $t$

$$\mathbf{P}(|g(X) - m| \geq t) \leq 4 \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

où  $m$  est une médiane de  $g(X)$ .

**Q 40.** En déduire que  $\mathbf{E}((g(X) - m)^2) \leq 32$ .

**Q 41.** Montrer que  $\mathbf{E}(g(X)^2) = k$  et en déduire que  $\mathbf{E}(g(X)) \leq \sqrt{k}$ .

**Q 42.** En déduire que  $(\sqrt{k} - m)^2 \leq \mathbf{E}((g(X) - m)^2)$ .

### III.C - Un lemme-clé

**Q 43.** Montrer que, pour tout réel strictement positif  $t$

$$\mathbf{P}(|g(X) - \sqrt{k}| \geq t) \leq 4 \exp(4) \exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right)$$

On pose  $A_k = \frac{X}{\sqrt{k}}$ . Soient  $\varepsilon$  dans  $]0, 1[$  et  $\delta$  dans  $]0, 1/2[$ . On suppose que  $k \geq 160 \frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$ .

**Q 44.** Montrer que, pour tout vecteur unitaire  $u$  dans  $\mathbf{R}^d$  :

$$\mathbf{P}(\left| \|A_k \cdot u\| - 1 \right| > \varepsilon) < \delta$$

### III.D - Conclusion

On conserve les notations et les hypothèses précédentes.

Soient  $v_1, \dots, v_N$  des vecteurs distincts dans  $\mathbf{R}^d$ .

Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$  tel que  $i < j$ , on note  $E_{i,j}$  l'événement

$$(1 - \varepsilon) \|v_i - v_j\| \leq \|A_k \cdot v_i - A_k \cdot v_j\| \leq (1 + \varepsilon) \|v_i - v_j\|$$

**Q 45.** Montrer que  $\mathbf{P}(\overline{E_{i,j}}) < \delta$ , où  $\overline{E_{i,j}}$  désigne l'événement contraire de  $E_{i,j}$ .

**Q 46.** En déduire que  $\mathbf{P}\left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j}\right) \geq 1 - \frac{N(N-1)}{2}\delta$ .

**Q 47.** En déduire le théorème de Johnson et Lindenstrauss.