

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

*Quand on utilise un résultat précédemment démontré, il faut citer **explicitement** le **numéro** de la question.*

Notations

- Dans tout le problème, N, k et d désignent des entiers supérieurs ou égaux à deux.
- Pour tous entiers naturels p et q , avec $p \leq q$, la notation $\llbracket p, q \rrbracket$ désigne l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leq i \leq q\}$.
- Dans tout le problème, on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé **fini**. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur Ω .
- Pour tout événement A de probabilité non nulle, et pour tout événement B , on note $\mathbf{P}_A(B)$ ou $\mathbf{P}(B|A)$ la probabilité conditionnelle de B sachant A .
- Étant donnée une variable aléatoire Z à valeurs réelles, on note $\mathbf{E}(Z)$ son espérance.
- On dit qu'une variable aléatoire Z est une variable de Rademacher lorsque $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$$\mathbf{P}(Z = 1) = \mathbf{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$$

- De façon générale, si E est un espace euclidien, son produit scalaire et sa norme seront respectivement notés $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$. Ces notations seront utilisées notamment pour \mathbf{R}^d et \mathbf{R}^k , munis de leurs structures euclidiennes canoniques.
- Soit C une partie d'un espace vectoriel E . Elle est dite convexe si

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in C$$

Problématique

On s'intéresse à la question suivante : étant donnés N points dans un espace euclidien de grande dimension, est-il possible de les envoyer linéairement dans un espace de petite dimension sans trop modifier les distances entre ces points ?

Pour préciser cette question, considérons N vecteurs distincts v_1, \dots, v_N dans \mathbf{R}^d . Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, on dit qu'une application linéaire $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^k$ est une ε -isométrie pour v_1, \dots, v_N lorsque :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, (1 - \varepsilon)\|v_i - v_j\| \leq \|f(v_i) - f(v_j)\| \leq (1 + \varepsilon)\|v_i - v_j\|$$

La question peut se reformuler ainsi :

Objectif

Pour quelles valeurs de k existe-t-il $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^k$ qui soit une ε -isométrie pour v_1, \dots, v_N ?

On se propose d'établir le théorème suivant, démontré par William B. Johnson et Joram Lindenstrauss en 1984 :

Il existe une constante absolue c strictement positive telle que :

quels que soient N et d entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et quels que soient v_1, \dots, v_N distincts dans \mathbf{R}^d , il suffit que

$$k \geq c \frac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$$

pour qu'il existe une ε -isométrie $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^k$ pour v_1, \dots, v_N .

Les seules méthodes connues à ce jour pour démontrer ce résultat sont de nature probabiliste. Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires portant sur la convexité et les probabilités. La partie II est consacrée à la démonstration d'une inégalité de concentration, qui est utilisée dans la partie III où le théorème de Johnson-Lindenstrauss est démontré.

I. Préliminaires

I.A - Projection sur un convexe fermé

Soit E un espace euclidien.

Q 1. Soient a et b dans E . Montrer la relation suivante et en donner une interprétation géométrique :

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

Q 2. En déduire que si u, v et v' dans E vérifient $v \neq v'$ et $\|u - v\| = \|u - v'\|$ alors

$$\left\| u - \frac{v + v'}{2} \right\| < \|u - v\|$$

Q 3 (admise) Soient F un fermé non vide de E et u dans E . **On admet** qu'il existe v dans F tel que

$$\forall w \in F, \|u - v\| \leq \|u - w\|$$

Q 4. En déduire que si C est un convexe fermé non vide de E et u est un vecteur de E alors il existe un unique v dans C tel que

$$\forall w \in C, \|u - v\| \leq \|u - w\|$$

On dira que v est le projeté de u sur C et on notera $d(u, C) = \|u - v\|$.

I.B - Inégalité de Hölder pour l'espérance

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q 5. Montrer que, pour tous réels positifs a et b ,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

On pourra utiliser la concavité du logarithme.

Q 6. En déduire que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé **fini** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ alors

$$\mathbf{E}(|XY|) \leq \mathbf{E}(|X|^p)^{1/p} \mathbf{E}(|Y|^q)^{1/q}$$

On pourra d'abord montrer ce résultat lorsque $\mathbf{E}(|X|^p) = \mathbf{E}(|Y|^q) = 1$.

I.C - Espérance conditionnelle

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire à valeurs réelles.

Pour tout événement $A \subset \Omega$ de probabilité non nulle, l'espérance conditionnelle de X sachant A , notée $\mathbf{E}(X|A)$, est par définition le réel

$$\mathbf{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}_A(X = x) \cdot x$$

En d'autres termes, $\mathbf{E}(X|A)$ est l'espérance de X dans l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_A)$.

Les propriétés usuelles de linéarité et positivité de l'espérance, qu'on ne demande pas de redémontrer, sont ainsi valables pour l'espérance conditionnelle sachant A .

Q 7. Soit (A_1, \dots, A_m) un système complet d'événements de probabilités non nulles. Montrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{E}(X|A_i)$$

I.D - Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire réelle.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que pour tout réel positif t ,

$$\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq a \exp(-bt^2)$$

Q 8. Montrer que

$$\mathbf{E}(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} t \mathbf{P}(|X| \geq t) dt$$

On pourra noter $X^2(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ avec $0 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n$.

Q 9. Montrer que le moment d'ordre deux de X est inférieur ou égal à $\frac{a}{b}$.

Soit δ un réel tel que $0 \leq |\delta| \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Q 10. Justifier que, pour tout réel t ,

$$\mathbf{P}(|X + \delta| \geq t) \leq \mathbf{P}(|X| \geq t - |\delta|)$$

Q 11. Montrer que, pour tout réel t ,

$$-b(t - |\delta|)^2 \leq a - \frac{t^2 b}{2}$$

Q 12. En déduire que pour tout réel t tel que $t \geq |\delta|$ on a

$$\mathbf{P}(|X + \delta| \geq t) \leq a \exp(a) \exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right)$$

Q 13. Justifier que l'inégalité précédente reste valable si $0 \leq t < |\delta|$.

II. L'inégalité de concentration de Talagrand

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ muni d'une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) .

Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$ des variables de Rademacher indépendantes.

On pose $X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i$.

L'objectif de cette partie est de montrer, pour tout convexe fermé non vide C de E ,

$$\mathbf{P}(X \in C) \cdot \mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\right) \leq 1 \quad (\text{II.1})$$

II.A - Étude de deux cas particuliers

Q 14. Traiter le cas où C est un convexe fermé ne rencontrant pas $X(\Omega)$.

On suppose dans la suite de cette sous-partie II.A uniquement, que C est un convexe fermé de E qui rencontre $X(\Omega)$ en un seul vecteur u .

Q 15. Montrer que $\frac{1}{4}d(X, u)^2$ suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Q 16. En déduire l'espérance de $\exp\left(\frac{1}{8}d(X, u)^2\right)$ et montrer qu'elle est inférieure ou égale à 2^n .

Q 17. Justifier que $d(X, C) \leq d(X, u)$ et en déduire l'inégalité (II.1) dans ce cas.

II.B - Initialisation

On suppose désormais que C est un convexe fermé de E tel que $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments. Quitte à permuter les vecteurs de la base, on peut supposer que ces deux vecteurs diffèrent par leur dernière coordonnée.

On se propose de démontrer l'inégalité (II.1) par récurrence sur la dimension n de E .

Q 18. Traiter le cas $n = 1$.

II.C - Propriétés

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On suppose à présent que (II.1) est vérifiée au rang $n - 1$.

On note $E' = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ et π la projection orthogonale sur E'

$$\pi : \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$$

On pose $X' = \pi \circ X = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$. C'est une variable aléatoire à valeurs dans E' .

Pour $t \in \{-1, 1\}$ on note

- H_t l'hyperplan affine $E' + te_n$;
- $C_t = \pi(C \cap H_t)$.

Q 19. Montrer, pour $x' \in E'$ et $t \in \{1, -1\}$, que $x' \in C_t \iff x' + te_n \in C$

Q 20. Montrer que C_{+1} et C_{-1} sont des convexes fermés non vides de E' .

Pour $t \in \{-1, 1\}$, on note Y_t le projeté de X' sur le convexe fermé non vide C_t . C'est une variable aléatoire à valeurs dans E' .

Q 21. Montrer que

$$\mathbf{P}(X \in C) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X' \in C_{+1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X' \in C_{-1})$$

II.D - Une inégalité cruciale

Soit λ un réel tel que $0 \leq \lambda \leq 1$.

Q 22. Montrer que

$$d(X, C) \leq \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|$$

Q 23. En déduire que

$$d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2$$

puis que

$$d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + (1 - \lambda)\|Y_{\varepsilon_n} - X'\|^2 + \lambda\|Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$$

Ainsi, on a montré l'inégalité

$$d(X, C)^2 \leq 4\lambda^2 + (1 - \lambda)d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \lambda d(X', C_{-\varepsilon_n})^2$$

II.E - Espérances conditionnelles

On note

$$p_+ = \mathbf{P}(X' \in C_{+1}) \text{ et } p_- = \mathbf{P}(X' \in C_{-1})$$

On va supposer, sans perte de généralité, que $p_+ \geq p_-$.

Q 24. Montrer que $p_- > 0$.

Q 25. Montrer que pour tout λ dans $[0, 1]$

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{d(X, C)^2}{8} \right) \middle| \varepsilon_n = -1 \right) \leq \exp \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) \mathbf{E} \left(\left(\exp \left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8} \right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp \left(\frac{d(X', C_1)^2}{8} \right) \right)^\lambda \right)$$

Q 26. En déduire que

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{d(X, C)^2}{8} \right) \middle| \varepsilon_n = -1 \right) \leq \exp \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) \left(\mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{d(X', C_{-1})^2}{8} \right) \right) \right)^{1-\lambda} \cdot \left(\mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{d(X', C_1)^2}{8} \right) \right) \right)^\lambda$$

Q 27. À l'aide de l'hypothèse de récurrence, justifier que

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \middle| \varepsilon_n = 1 \right) \leq \frac{1}{p_+}$$

Q 28. Dédurre de ce qui précède que pour tout λ dans $[0, 1]$,

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_+} + \exp \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) \frac{1}{p_-^{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{p_+^\lambda} \right)$$

II.F - Optimisation

Q 29. On pose $\lambda = 1 - \frac{p_-}{p_+}$. Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(\frac{1}{8} d(X, C)^2 \right) \right) \leq \frac{1}{2p_+} \left(1 + \exp \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) (1 - \lambda)^{\lambda-1} \right)$$

Q 30. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\frac{x^2}{2} + (x - 1) \ln(1 - x) \leq \ln(2 + x) - \ln(2 - x)$$

On pourra faire une étude de fonction.

Q 31. En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$

$$1 + \exp \left(\frac{x^2}{2} \right) (1 - x)^{x-1} \leq \frac{4}{2 - x}$$

Q 32. Terminer la démonstration de l'inégalité (II.1).

II.G - Inégalité de Talagrand

Q 33. En déduire l'inégalité de Talagrand :

Pour tout C convexe fermé non vide de E et pour tout réel t strictement positif

$$\mathbf{P}(X \in C) \cdot \mathbf{P}(d(X, C) \geq t) \leq \exp \left(-\frac{t^2}{8} \right)$$

III. Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

Dans cette partie on considère l'espace $E = \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall (A, B) \in E^2, \langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top \cdot B)$$

On notera $\|\cdot\|_F$ la norme euclidienne associée.

On rappelle que \mathbf{R}^d et \mathbf{R}^k sont munis des normes euclidiennes canoniques, notées indistinctement $\|\cdot\|$.

On identifie \mathbf{R}^d à $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbf{R})$ de sorte qu'un vecteur quelconque $x = (x_1, \dots, x_d)$ peut être identifié à la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_d \end{pmatrix}^\top$.

On fixe un vecteur (u_1, \dots, u_d) dans \mathbf{R}^d , identifié comme ci-dessus à la colonne $\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_d \end{pmatrix}^\top$ de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbf{R})$, et tel que $\|u\| = 1$. On définit l'application

$$g : M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R}) \mapsto \|M \cdot u\| \in \mathbf{R}$$

Soit $X = (\varepsilon_{i,j})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$; dont les coefficients $\varepsilon_{i,j}$ sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes.

III.A - Une inégalité de concentration

Soit r un réel.

Q 34. Montrer que $C = \{M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R}) \mid g(M) \leq r\}$ est une partie convexe et fermée de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$.

Q 35. Montrer que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$: $\|M \cdot u\| \leq \|M\|_F$.

Soit $t > 0$.

Q 36. Montrer que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$,

$$d(M, C) < t \Rightarrow g(M) < r + t$$

Q 37. En déduire que

$$\mathbf{P}(g(X) \leq r) \cdot \mathbf{P}(g(X) \geq r + t) \leq \exp \left(-\frac{t^2}{8} \right)$$

III.B - Médianes

On dit qu'un réel m est une médiane de $g(X)$ lorsque

$$\mathbf{P}(g(X) \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(g(X) \leq m) \geq \frac{1}{2}$$

Q 38. Justifier que $g(X)$ admet au moins une médiane.

Q 39. Dédurre de ce qui précède que, pour tout réel strictement positif t

$$\mathbf{P}(|g(X) - m| \geq t) \leq 4 \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

où m est une médiane de $g(X)$.

Q 40. En déduire que $\mathbf{E}((g(X) - m)^2) \leq 32$.

Q 41. Montrer que $\mathbf{E}(g(X)^2) = k$ et en déduire que $\mathbf{E}(g(X)) \leq \sqrt{k}$.

Q 42. En déduire que $(\sqrt{k} - m)^2 \leq \mathbf{E}((g(X) - m)^2)$.

III.C - Un lemme-clé

Q 43. Montrer que, pour tout réel strictement positif t

$$\mathbf{P}(|g(X) - \sqrt{k}| \geq t) \leq 4 \exp(4) \exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right)$$

On pose $A_k = \frac{X}{\sqrt{k}}$. Soient ε dans $]0, 1[$ et δ dans $]0, 1/2[$. On suppose que $k \geq 160 \frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$.

Q 44. Montrer que, pour tout vecteur unitaire u dans \mathbf{R}^d :

$$\mathbf{P}(|\|A_k \cdot u\| - 1| > \varepsilon) < \delta$$

III.D - Conclusion

On conserve les notations et les hypothèses précédentes.

Soient v_1, \dots, v_N des vecteurs distincts dans \mathbf{R}^d .

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ tel que $i < j$, on note $E_{i,j}$ l'événement

$$(1 - \varepsilon)\|v_i - v_j\| \leq \|A_k \cdot v_i - A_k \cdot v_j\| \leq (1 + \varepsilon)\|v_i - v_j\|$$

Q 45. Montrer que $\mathbf{P}(\overline{E_{i,j}}) < \delta$, où $\overline{E_{i,j}}$ désigne l'événement contraire de $E_{i,j}$.

Q 46. En déduire que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j}\right) \geq 1 - \frac{N(N-1)}{2}\delta$.

Q 47. En déduire le théorème de Johnson et Lindenstrauss.