Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème

Exercice

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.
Dans cet exercice toutes les variables aléatoires seront définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
Pour X une variable aléatoire.

— Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on dit que X est bornée par α si $|X| \leqslant \alpha$.

— On dit que X est bornée s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que X est bornée par α.

— On dit que X est centrée si X est d'espérance finie et $\mathbf{E}(X) = 0$.

1) Soit X une variable aléatoire discrète bornée et $t \in \mathbf{R}$. Montrer que e^{tX} est une variable aléatoire discrète d'espérance finie.

On note alors $L_X : t \mapsto \mathbf{E}(e^{tX})$.

2) Soit X une variable aléatoire discrète centrée et bornée par 1.
   On fixe $t \in \mathbf{R}$.
   a) Justifier que la fonction $u \mapsto e^u$ est convexe sur $\mathbf{R}$
   b) En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$: $e^{tx} \leqslant \dfrac{1-x}{2}e^{-t} + \dfrac{1+x}{2}e^{t}$.
   c) Montrer que $L_X(t) \leqslant \operatorname{ch}(t)$
   d) Donner les développements en série entière de $u \mapsto \operatorname{ch}(u)$ et de $u \mapsto \exp\left(\frac{u^2}{2}\right)$.
   e) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $2^n \times n! \leqslant (2n)!$.
   f) En déduire que $L_X(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

On considère une suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ de variables aléatoires discrètes réelles. On suppose qu'elles sont indépendantes, centrées et bornées. Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, on note α_i un réel strictement positif tel que $|X_i| \leqslant \alpha_i$.
Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $\beta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2$.

3) On fixe $t \in \mathbf{R}_+$.
   a) Soit $i \geqslant 1$. Montrer que $L_{X_i}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\alpha_i^2\right)$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $L_{S_n}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\beta_n\right)$.
   c) Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{L_{S_n}(t)}{e^{t\varepsilon}} = \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\beta_n\right)$$

4) En déduire que pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\beta_n}\right)$$

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel strictement positif et $(y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ est une famille de $n+1$ nombres réels.
On désigne par k un entier inférieur ou égal à n.
Pour tout polynôme P on pose

$$\Delta(P) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(i))^2$$

L'objet du problème est de déterminer les polynômes P de degré inférieur ou égal à k, tels que le réel $\Delta(P)$ soit minimum et de préciser la valeur $m_k = \min\{\Delta(P)\ ,\ P \in \mathbf{R}_k[X]\}$ de ce minimum.

Partie I

1) On considère φ_k l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_k : & \mathbf{R}_k[X] & \to & \mathbf{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(0), P(1), \cdots, P(n)) \end{array}$$

On ne demande pas de justifier que φ_k est linéaire.

   a) Justifiez que l'application φ_k est injective.
   b) Déterminer le rang de φ_k.
   c) En déduire que φ_k est un isomorphisme si et seulement si $k = n$.

2) a) Justifier qu'il existe un unique polynôme $Y \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $Y(i) = y_i$.

Dans toute la suite du problème le polynôme Y est le polynôme ainsi défini.

   b) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbf{R}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], L_i(j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

   c) Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base (notée $\mathscr{L}$) de $\mathbf{R}_n[X]$.
   d) Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$ déterminer ses coordonnées dans la base $\mathscr{L}$.

3) Si $k = n$ montrer que $\{\Delta(P)\ ,\ P \in \mathbf{R}_k[X]\}$ possède un mimimum m_k et le déterminer.

Partie II

4) Pour P, Q deux polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$ on pose $\langle P \mid Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$.

Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

Dans tout ce qui suit, l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[X]$ est muni de ce produit scalaire. On désigne alors par $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

5) a) Montrer que la base $\mathscr{L}$ définie à la question 2) est orthonormée pour ce produit scalaire.

b) Calculer les produits scalaires $\langle 1|1\rangle$ et $\langle 1|X\rangle$.

c) Montrer que pour tout entier $N \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{p=1}^{N} p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$. En déduire $\langle X|X\rangle$.

6) a) Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$, Montrer que $\Delta(P) = \|Y - P\|^2$.

On rappelle que Y désigne le polynôme défini à la question 2.a).

b) En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbf{R}_k[X]$ tel que

$$\Delta(P_k) = m_k = \min\{\Delta(P)\ ,\ P \in \mathbf{R}_k[X]\}$$

Que dire du polynôme $Y - P_k$ et du sous-espace vectoriel $\mathbf{R}_k[X]$? Faire un croquis.

c) **Dans cette question seulement** on suppose que $k = 0$.

Déterminer en fonction de $y_0, y_1, \cdots, y_n$ les expressions de P_0 et m_0.

Comparer $\|Y\|^2 - \|P_0\|^2$ et m_0.

d) **Dans cette question seulement** on suppose que $k = 1$ et que l'entier n est impair. On pose $n = 2q - 1$ où q est un entier non nul.

On suppose de plus que les valeurs $(y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ sont définies par la relation :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant q-1 \\ -1 & \text{si } q \leqslant i \leqslant 2q-1 \end{cases}$$

Calculer $\langle Y|1\rangle$ et $\langle Y|X\rangle$ puis déterminer le polynôme P_1.

Partie III

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on note F_k l'orthogonal de $\mathbf{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbf{R}_k[X]$. On a donc

$$F_k = \{P \in \mathbf{R}_k[X] \mid \forall Q \in \mathbf{R}_{k-1}[X], \langle P|Q\rangle = 0\}$$

Dans cette partie on veut construire puis étudier un famille $\mathscr{B} = (B_0, B_1, \ldots, B_n)$ de polynômes vérifiant les trois conditions suivantes

i) le polynôme B_0 est égal à 1 ;

ii) pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n la suite $(B_0, B_1, \ldots, B_k)$ est une base **orthogonale** de $\mathbf{R}_k[X]$.

iii) pour k supérieur ou égal à 0, le coefficient dominant du polynôme B_k esr égal au coefficient du binôme $\binom{2k}{k}$.

7) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Donner la dimension de F_k.

8) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note Q_k le projeté orthogonal de X^k sur $\mathbf{R}_{k-1}[X]$

a) Soit $(B_0,\ B_1,\ \cdots,\ B_n)$ une famille vérifiant la condition ii). Soit $k \in [\![1, n]\!]$, justifier que B_k et $X^k - Q_k$ appartiennent à F_k. En déduire que B_k est colinéaire à $X^k - Q_k$.

b) En déduire qu'il existe une unique famille $\mathscr{B} = (B_0, B_1, \ldots, B_n)$ de polynômes vérifiant les conditions i), ii) et iii).

c) Calculer Q_1 et Q_2. En déduire B_1 et B_2.

On rappelle que pour tout entier $N \in \mathbf{N}^*$, $\sum\limits_{p=1}^{N} p^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$.

9) Soit k un entier compris entre 1 et n, montrer que le polynôme $B_k(n-X)$ (associé à la fonction polynomiale $x \mapsto B_k(n-x)$) appartient à F_k.

En déduire une relation simple entre les polynômes $B_k(n-X)$ et B_k.

10) a) Exprimer à l'aide de produits scalaires les coordonnées du polynôme P_k, défini à la question 6.b) dans la base $\mathscr{B}$.

b) En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et n :

$$P_k = P_{k-1} + \frac{\langle B_k|Y\rangle}{\|B_k\|^2} B_k \qquad \text{et} \qquad m_k = m_{k-1} - \frac{\langle B_k|Y\rangle^2}{\|B_k\|^2}$$

11) a) Justifier que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}) \in \mathbf{R}^{k+2}$ tels que : $X.B_k = \sum\limits_{j=0}^{k+1} \lambda_j \ B_j$.

Rappeler la valeur de λ_j en fonction du produit scalaire.

b) Justifier que pour tous $P, Q, R \in \mathbf{R}_n[X]$ vérifiant $P.Q$, $Q.R \in \mathbf{R}_n[X]$, on a $\langle PQ|R\rangle = \langle P|QR\rangle$.

c) Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, k-2]\!]$. Démontrer que : $\langle XB_k|B_j\rangle = 0$.

d) En déduire, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, l'existence de réels α_k, β_k et γ_k tels que :

$$X.B_k = \gamma_k B_{k+1} + \beta_k B_k + \alpha_k B_{k-1}$$

e) Déterminer la valeur de γ_k.

f) En déduire la valeur du produit scalaire $\langle XB_k|B_{k+1}\rangle$ en fonction de l'entier k et du réel $\|B_{k+1}\|^2$.

g) Déterminer, à l'aide de la question 9), la valeur du réel β_k.

h) Déterminer le réel α_k en fonction de l'entier k et des réels $\|B_{k-1}\|^2$ et $\|B_k\|^2$.

Déduire des résultats précédents la relation :

$$B_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1}\left(B_1.B_k - \frac{k}{2k-1}\frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2}B_{k-1}\right).$$