Exercice I

1) a) Le polynôme caractéristique χ_A de A annule A (c'est le théorème de Cayley-Hamilton). Ainsi pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = R(A)$ où R est le reste de la division euclidienne de P par χ_A. Ainsi $\mathbb{K}[A] \subset \mathsf{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$. L'inclusion réciproque est évidente.

   Donc $\boxed{\mathbb{K}[A]X = \mathsf{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})X = \mathsf{Vect}(X, AX, A^2X, \ldots, A^{n-1}X)}$.

   b) Soit A comme dans l'enoncé.

   Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $(X, AX, \ldots, A^{n-1}X)$ est la $\underline{\text{base canonique de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$,

   donc X est une colonne A-génératrice. Ainsi $\boxed{A \text{ est cyclique}}$.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

   La famille $(X, AX, \ldots, A^{n-1}X)$ est une famille de n vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, qui est de dimension n. Cette famille est donc génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ si et seulement si c'en est une base, c'est-à-dire si et seulement si $\varphi_X(A) \neq 0$.

   On a donc d'après 1)a) :

   $\boxed{X \text{ est une colonne } A\text{-génératrice si et seulement si } \varphi_X(A) \neq 0}$.

3) a) Soit A un élément de $\mathscr{C}$ et X une colonne A-génératrice.

   La fonction φ_X est continue car polynômiale en les coefficients de sa variable A. On peut aussi dire que φ_X est continue par continuité du produit matriciel et du déterminant.

   D'après la question précédente, $\mathscr{C}$ contient $\varphi_X^{-1}(\mathbb{K}^*)$, qui est un ouvert comme image réciproque de $\mathbb{K}^*$, qui est un ouvert de $\mathbb{K}$, par l'application continue φ_X. De plus cet ouvert contient A car $\varphi_X(A) \neq 0$.

   Donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ est un voisinage de } A}$.

   b) $\mathscr{C}$ est donc voisinage de tous ses points, donc est $\boxed{\text{ouvert}}$.

4) a) Comme les coefficients de M_λ sont polynomiaux en λ, θ_X est polynomiale.

   De plus, $\theta_X(0) = \varphi_X(A) \neq 0$, donc θ_X n'est pas la fonction nulle.

   Donc θ_X a un nombre fini de zéros. Ainsi :

   $\boxed{M_\lambda \text{ appartient à } \mathscr{C} \text{ pour tout } \lambda \text{ dans } \mathbb{K} \text{ privé d'un ensemble fini}}$.

   b) Considérons la suite $(M_{1-\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme les $1 - \frac{1}{n}$ sont deux à deux distincts, $M_{1-\frac{1}{n}}$ appartient à $\mathscr{C}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ privé d'un ensemble fini. Ainsi tous les termes de la suite sont dans $\mathscr{C}$ à partir d'un certain rang. De plus, cette suite a pour limite B par continuité du produit externe. Donc B est adhérent à $\mathscr{C}$.

   Ainsi tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est adhérent à $\mathscr{C}$, qui est donc $\boxed{\text{dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice II

1) On fixe $\varepsilon > 0$ et $x \in K$.

   a) Soit $x \in K$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0} = (f^n(x))_{n\geqslant 0}$ est une suite à valeurs dans K. Il existe donc une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in K$. Pour $\frac{\varepsilon}{2}$, il existe N tel que pour n supérieur à N, $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. En particulier, en posant $p = \varphi(N)$ et $q = \varphi(N+1) > p$,

   $$\|f^p(x) - f^q(x)\| = \|u_p - u_q\| = \|(u_p - \ell) + (\ell - u_q)\| \leqslant \|u_p - \ell\| + \|u_q - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

   b) On voit par une récurrence immédiate que l'hypothèse sur f implique que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout x, y dans K, $\|f^i(x) - f^i(y)\| \geqslant \|x - y\|$.

   On peut supposer par symétrie que $p > q$. Plus précisément, notons $k = p - q \in \mathbb{N}^*$.

   On voit que si $q \geqslant 1$,

   $$\varepsilon \geqslant \|f^{q+k}(x) - f^q(x)\| = \|f^q(f^k(x)) - f^q(x)\| \geqslant \|f^k(x) - x\|$$

2) On considère $K^2 \subset E^2$ muni de la norme produit notée N. On pose alors $g : K^2 \to K^2$ définie par $g : (x, x') \mapsto (f(x), f(x'))$. On voit que pour tout $(x, x'), (y, y') \in K^2$,

   $$N(g(x, x') - g(y, y')) = N(f(x) - f(y), f(x') - f(y'))$$

   Par symétrie, on peut supposer que $N((x, x') - (y, y')) = N(x - y, x' - y') = \|x - y\|$. On a donc

   $$N((x, x') - (y, y')) = \|x - y\| \leqslant \|f(x) - f(y)\| \leqslant N(f(x) - f(y), f(x') - f(y')) = N(g(x, x') - g(y, y'))$$

   On fixe $\varepsilon > 0$ et $x, y \in K$.

   Comme K^2 est compact comme produit de deux compacts, on peut appliquer le résultat de la question précédente pour obtenir l'existence de $k \geqslant 1$ vérifiant que

   $$N(g^k(x, y) - (x, y)) = N(f^k(x) - x, f^k(y) - y) \leqslant \varepsilon$$

   Cela implique que $\|f^k(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ et $\|f^k(y) - y\| \leqslant \varepsilon$.

3) Soit $x, y \in K$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient d'après 2) un entier $k \geqslant 1$, $\|f^k(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ et $\|f^k(y) - y\| \leqslant \varepsilon$.

   En utilisant la résultat prouvé à la question 1.b) on a

   $$\|f^k(x) - f^k(y)\| = \|f^{k-1}(f(x)) - f^{k-1}(f(y))\| \geqslant \|f(x) - f(y)\|$$

   On en déduit que

   $$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|f^k(x) - f^k(y)\| \leqslant \|f^k(x) - x\| + \|x - y\| + \|f^k(y) - y\| \leqslant 2\varepsilon + \|x - y\|$$

   En faisant alors tendre ε vers 0, on obtient que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$. Cela montre que f est une isométrie.

4) Montrons pour commencer que f est injective. Soit $x, y \in K$ alors $f(x) = f(y)$. Comme f est une isométrie, $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| = 0$ donc $x = y$.

Montrons maintenant que f est surjective. On pose $X = f(K)$. D'après la question 1.a, pour tout $x \in K$ et $\varepsilon > 0$, il existe $y \in X$ tel que $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$. Cela montre que X est dense dans K.

De plus, $X = f(K)$ est l'image d'un compact par une application continue. C'est donc un compact. En particulier X est fermé. On en déduit que $X = \overline{X} = K$. On a bien obtenu que f était surjective.