Le but de ce devoir est d'étudier la surjectivité de l'application $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des polynômes en A :

$$\mathbb{K}[A] = \{P(A)\ ,\ P \in \mathbb{K}[X]\}$$

On va montrer que :
- pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'application est surjective. Plus précisément, pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(M) = A$. On peut même choisir M dans $\mathbb{C}[A]$.
- pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'application exp n'est pas surjective et on caractérise son image.

Partie I - $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Justifier que $\mathbb{C}[A]$ est fermé. En déduire que $\mathbb{C}[A]$ est stable par exp.
2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)$ est inversible si et seulement si P est premier avec π_A où π_A désigne le polynôme minimal de A.
3) Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}[A]$. Montrer que $B^{-1} \in \mathbb{C}[A]$.

On pose $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}[A]$.

4) a) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.
   b) On pose $H = \exp(\mathbb{C}[A])$. Montrer que H est un sous-groupe de $(G, \times)$.

On admet que H est un ouvert relatif de G.

5) Montrer que $\complement_G H = \bigcup_{M \in G \setminus H} MH$ où $MH = \{MB\ ,\ B \in H\}$

   En déduire que H est un fermé relatif de G.
6) a) Soit M et N dans G. Montrer que $\{z \in \mathbb{C}\ ,\ (1-z)M + zN \text{ non inversible}\}$ est fini.
   b) Montrer que G est connexe par arcs.
7) a) Soit $M \in H$ et $N \in G$. En considérant un chemin continu $\gamma : [0,1] \to G$ de M à N et le réel $t_0 = \sup\{a \in [0,1],\ \gamma([0,a]) \subset H\}$, montrer que $N \in H$.
   b) Conclure.

Partie II - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

8) On suppose qu'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = \exp(M)$.
   Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.
9) Réciproquement, on suppose qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.
   En considérant un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(P(B)) = B$ ainsi que le polynôme $\bar{P}$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P, montrer que

$$A \in \exp(\mathbb{R}[B]) \subset \exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$$