Dans tout le sujet on se fixe un entier naturel $N \geqslant 2$.

— On identifie $\mathbb{R}^N$ avec $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in [\![ 1\,;\, N ]\!]$ on note $E_k \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf la $k$-ième qui vaut 1. On rappelle que $(E_1, \dots, E_N)$ est une base de $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.
On note $U \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On a donc pour tout $i \in [\![ 1\,;\, N ]\!]$, $U[i] = 1$.

— On appelle noyau de Markov une matrice $K \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ telle que

$(M_1)$ $\forall (i,j) \in [\![ 1\,;\, N ]\!]^2, K[i,j] \geqslant 0$

$(M_2)$ $\forall i \in [\![ 1\,;\, N ]\!], \sum\limits_{j=1}^{N} K[i,j] = 1$

— On appelle probabilité un vecteur ligne $\mu \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ tel que

$(P_1)$ $\forall i \in [\![ 1\,;\, N ]\!], \mu[i] \geqslant 0$

$(P_2)$ $\sum\limits_{j=1}^{N} \mu[j] = 1$

— On notera $I_N \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ la matrice identité.

## Partie 1 - Préliminaires

1) Soit $A \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$. Montrer que $A$ vérifie $(M_2)$ si et seulement si $AU = U$.
En déduire que si $A$ et $B$ sont deux noyaux de Markov alors $AB$ est encore un noyau de Markov.

On se fixe un noyau de Markov $K$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on notera $H_t \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$H_t = e^{-t} \exp(tK)$$

2) Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, $H_t$ est un noyau de Markov et justifier que pour $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$, $H_{t+s} = H_t H_s$.

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $N$. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint de $E$. On pose $q_u : E \to \mathbb{R}$ défini par $q_u : x \mapsto (u(x)|x)$ et on suppose que pour tout $x \in E$, $q_u(x) \geqslant 0$.

3) Énoncer le théorème spectral pour l'endomorphisme $u$. Que peut-on dire des valeurs propres de $u$ ?

On suppose que 0 est valeur propre simple de $u$ et on note $\lambda_2$ la plus petite valeur propre non nulle de $u$. On note $p : E \to E$ la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(u)$.

4) Montrer que pour tout $x \in E$, $q_u(x - p(x)) \geqslant \lambda_2 \|x - p(x)\|^2$.

## Partie 2 - Convergence de $H_t$

On considère un noyau de Markov $K$. On suppose que 1 est une valeur propre simple de $K$.
On suppose qu'il existe une probabilité $\pi \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ telle que :

(a) Pour tout $j \in [\![ 1\,;\, N ]\!]$, $\pi[j] \neq 0$.

(b) $\forall (i,j) \in [\![ 1\,;\, N ]\!]^2, \pi[i]K[i,j] = K[j,i]\pi[j]$ ; on dit que $K$ est $\pi$-reversible.

Un rapide calcul montre alors que pour tout réel $t$ positif $H_t$ est aussi un noyau de Markov $\pi$-réversible c'est-à-dire que

$$\forall (i,j) \in [\![ 1\,;\, N ]\!]^2, \pi[i]H_t[i,j] = H_t[j,i]\pi[j]$$

On ne demande donc pas de démontrer ce résultat.

Pour finir, pour $X, Y \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})^2$, on pose

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{N} X[i]Y[i]\pi[i]$$

Dans cette dernière partie, on cherche à déterminer pour $(i,j) \in [\![ 1\,;\, N ]\!]^2$ la limite de $H_t[i,j]$ quand $t$ tend vers $+\infty$ et à majorer la vitesse de convergence.

5) Montrer que $\pi K = \pi$.

6) Montrer que $(X,Y) \mapsto \langle X, Y\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite on note $E$ l'espace l'espace euclidien $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire.

7) On considère l'endomorphisme de $E$ défini par $u : X \mapsto (I_N - K)X$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(U)$ et que $u$ est un endomorphisme autoadjoint de $E$.
   On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'endomorphisme $X \mapsto H_t X$ est aussi un endomorphisme autoadjoint de $E$.

8) Montrer que pour tout $X \in E$,

$$q_u(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(X[i] - X[j])^2 K[i,j]\pi[i]$$

   Que dire des valeurs propres de $u$ ?

Soit $X \in E$, on note $\psi_X$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $E$ par $\psi_X : t \mapsto H_t X$ et $\varphi_X$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_X : t \mapsto \|H_t X\|^2$

9) Justifier que $\psi_X$ est dérivable et que pour tout $t$ dans $\mathbb{R}$,

$$\psi_X'(t) = -(I_N - K)H_t X$$

10) En déduire que $\varphi_X$ est dérivable et exprimer $\varphi_X'(t)$ à l'aide de $q_u$.

On note $p : E \to E$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(u)$.

11) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $p(H_t X) = p(X)$.

12) On pose $Y = X - p(X)$. On note $\lambda$ la plus petite valeur propre non nulle de $u$.
   Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_Y'(t) \leqslant -2\lambda\varphi_Y(t)$.
   En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \|H_t X - p(X)\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\|X - p(X)\|^2$.

13) Soit $i \in [\![ 1\,;\, N ]\!]$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]}$.

14) Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![ 1\,;\, N ]\!]^2$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$H_t[i,j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^{N}(H_{t/2}[i,k] - \pi[k])(H_{t/2}[k,j] - \pi[j])$$

   *On pourra utiliser la question 2.*

15) En déduire que pour tout $(i,j) \in [\![ 1\,;\, N ]\!]^2$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|H_t[i,j] - \pi[j]| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$$

   Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} H_t[i,j]$.