

Semaine 18 - du 6 au 10 février

Topologie (fin) et endomorphismes autoadjoints

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Convergence et absolue convergence

Séries géométriques et exponentielles de matrices

Connexité par arcs

Chemin de A allant de x à y .

La relation $(x \mathcal{R}_A y) \iff (\text{il existe un chemin de } A \text{ de } x \text{ à } y)$ est une relation d'équivalence

Parties étoilée

On a les implications (convexe) $\Rightarrow$ (étoilée) $\Rightarrow$ (connexe par arcs) : réciproque fausse en général.

Composantes connexes par arcs

L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs

Endomorphismes autoadjoints

Définition d'un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique). Espace $\mathcal{S}(E)$.

Un projecteur est symétrique si et seulement s'il est orthogonal

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, u est symétrique si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Dimension de $\mathcal{S}(E)$.

Théorème spectral : Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormale.

Théorème spectral : écriture matricielle

Endomorphismes autoadjoints positifs ; définis positifs

Définition des endomorphismes autoadjoints positifs ; définis positifs. Notation $S^+(E)$, $S^{++}(E)$.

Définition des matrices symétriques réelles positives ; définies positives. Notation $S_n^+(\mathbf{R})$, $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Caractérisation spectrale :

pour $u \in S(E)$, $u \in S^+(E)$ (resp. $u \in S^{++}(E)$) si et seulement si $\text{Sp}(u) \subset \mathbf{R}_+$ (resp. $\text{Sp}(u) \subset \mathbf{R}_+^*$)