MP **2025 – 2026**

Exercices de mathématiques

Partie II

CHAPITRE 9

Espaces vectoriels normés I

1 Applications du cours

A Manipulations sur les normes

□ **Exercice 1** Soit $\| \ \|$ une norme sur un espace vectoriel normé E, soient $(a,b) \in E \times E$, soient $r,s > 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a,b,s,r pour que $B_f(a,r) \subset B_f(b,s)$.

□ **Exercice 2** Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et $T : E \to E$ définie par

$$T : u \mapsto \begin{cases} u & \text{si} \quad \|u\| \leqslant 1 \\ \frac{u}{\|u\|} & \text{si} \quad \|u\| \geqslant 1 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall\ (u,v) \in E\ ,\ \ \|T(u) - T(v)\| \leqslant 2\|u - v\|$.

B Comparaisons de normes

□ **Exercice 3** Montrer que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.

□ **Exercice 4** Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R})\ ;\ f(0) = 0\}$.
Montrer que $f \mapsto \|f'\|_\infty$ et $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ sont deux normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

□ **Exercice 5** Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. On définit sur E une norme N en posant :

$$\forall\ f \in E\ ,\ \ N(f) = \int_0^1 e^t |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

1) Vérifier que N est bien une norme et la comparer à la norme infinie.
2) Trouver une suite de E convergente pour N et pas pour la norme infinie. Qu'en déduit-on ?
3) Comparer N à la norme $\| \ \|_1$.

□ **Exercice 6** Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ et N_1 et N_2 les applications définies sur E par :

$$\forall\ f \in E, \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } N_2(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Montrer que ce sont des normes sur E, les comparer ; sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 7** Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R})\ ;\ f(0)=0\}$ et N_∞ et N'_∞ les applications définies sur E par :

$$\forall f \in E, \quad N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ et } N'_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

Montrer que ce sont des normes sur E, les comparer. Sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 8** Soit $E = \ell^1(\mathbf{K}) = \{(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}\ ;\ \sum u_n$ est absolument convergente$\}$.

Si $u = (u_n) \in E$, on pose $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |u_n|$ et $\|u\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$.
Montrer que ce sont deux normes sur E, et les comparer.

□ **Exercice 9** Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. On définit $\|\ \|$ sur E par : $\forall f \in E\ \|f\| = \displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur E
2) Comparer $\|\ \|$ et $\|\ \|_1$; sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 10** Sur $\mathbf{C}[X]$, pour $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|\ , \qquad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2} \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$$

1) Prouver que ces trois applications définissent des normes sur $\mathbf{C}[X]$,
2) Montrer qu'elles vérifient $\|.\|_\infty \leqslant \|.\|_2 \leqslant \|.\|_1$
3) Sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 11** Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$. Ppour $P \in E$, on pose :

$$N_1(P) = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \quad , \quad N_2(P) = \int_0^\pi |P(\cos(t))|\,\mathrm{d}t$$

Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 12** Soit E l'espace vectoriel des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornées et telles que $u_0 = 0$. On définit N_∞ et N par : $\forall u \in E\ ,\ N_\infty(u) = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |u_n|\ ,\ N(u) = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1) Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E.
2) Montrer qu'il existe $k \in]0,+\infty[$ tel que : $\forall\ u \in E$, $N(u) \leqslant k\ N_\infty(u)$. Quel est le plus petit k possible ?
3) Les normes N et N_∞ sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 13** Soit E est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications bornées de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, muni de $\|\ \|_\infty$. Soit A est la partie de E constituée des applications continues sur $[0,1]$. On pose $f_0 : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 & \text{si} \quad x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Calculer $d(f_0, A)$.

□ **Exercice 14** Soit $N : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $N : (x,y) \mapsto \sup\limits_{t\in[0,1]} |tx + y|$.

1) Vérifier que N est une norme sur $\mathbf{R}^2$.
2) Tracer la boule unité.
3) Trouver $\alpha, \beta > 0$ les meilleurs possibles tels que :

$$\forall\ (x,y) \in \mathbf{R}^2\ ,\ \ \alpha\sqrt{x^2+y^2} \leqslant N(x,y) \leqslant \beta\sqrt{x^2+y^2}$$

C Applications linéaires lipschitziennes

□ **Exercice 15** On munit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\| \ \|$ définie sur E par :

$$\forall\, A \in E, \|A\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Montrer que la trace est lipschitzienne et calculer sa norme subordonnée .

□ **Exercice 16** On munit $\mathbf{R}^2$ de la norme $\|.\|_\infty$, $\mathbf{R}^3$ de la norme $\|.\|_1$ et on considère l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques respectives.
Vérifier qu'elle est lipschitzienne et calculer sa norme subordonnée .

□ **Exercice 17** On munit $\mathbf{C}^n$ de la norme N_∞. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, soit a l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ qui lui est canoniquement associé.

Déterminer la norme subordonnée pour a. Même question en munissant $\mathbf{C}^n$ de la norme N_1.

□ **Exercice 18** Soit $\mathscr{C}$ l'espace des suites réelles convergentes muni de la norme

$$\|u\| = \sup\{|u_n|, n \in \mathbf{N}\}$$

Soit $L : \mathscr{C} \to \mathbf{R}$ la fonction qui associe à toute suite sa limite.
Montrer que L est lipschitzienne et calculer sa norme subordonnée .

□ **Exercice 19** Dans $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, on considère les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$.
On note $E_\infty = (E, \| \ \|_\infty)$ et $E_1 = (E, \| \ \|_1)$. Soit φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall\, f \in E, \quad \forall\, x \in [0,1], \quad \varphi(f)(x) = \int_0^x t f(t)\, \mathrm{d}t$$

Vérifier que les applications linéaires suivantes sont lipschitziennes et calculer leur norme subordonnée.

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & E_\infty & \longrightarrow & E_\infty \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} \varphi_2 : & E_\infty & \longrightarrow & E_1 \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_3 : & E_1 & \longrightarrow & E_\infty \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} \varphi_4 : & E_1 & \longrightarrow & E_1 \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}$$

□ **Exercice 20** Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$. On considère $\varphi : E \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi : f \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x$$

Est-elle lipschitzienne sur E ?
Si oui, calculer sa norme subordonnée .

□ **Exercice 21** Soit $E = \mathbf{R}[X]$ et a un réel donné. Pour P dans E, on pose : $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$.

1) Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur E.
2) L'application $\varphi : E \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi : P \mapsto P(a)$ est-elle lipschitzienne sur E ?

□ **Exercice 22** On pose $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$ muni de la norme infini.
Pour $f \in E$, on pose $T(f)$ l'application définie sur $[0,1]$ par

$$T(f) : x \mapsto \int_0^1 \inf(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y$$

1) Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de E.
2) L'endomorphisme T est-il lipschitzien ?
3) L'endomorphisme T est-il injectif ? est-il un automorphisme de E ?
4) Déterminer les éléments propres de T.

D Suites de matrices

□ **Exercice 23** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 24** Déterminer si elle existe $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{A}{4}\right)^n$ où $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{A^n}{n4^n}\right)$

□ **Exercice 25** Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1: \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{R}) \\ 2: \text{ pour tout } n,\ A_n \text{ est inversible} \\ 3: \lim\limits_{n\to+\infty} A_n^{-1} = B \in \mathscr{M}_p(\mathbf{R}). \end{cases}$$

1) Montrer que A est inversible et $A^{-1} = B$.
2) Peut-on retirer la propriété 3 ?

□ **Exercice 26** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. Pour $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{C})$ on pose $G_X = \{A^n X / n \in \mathbf{N}\}$.

On suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{C})$, l'ensemble G_X est borné. Montrer que $|\mathrm{tr}(A)| \leqslant 2$.

□ **Exercice 27**

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A et B sont semblables.
2) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n}$.

□ **Exercice 28**

1) Soit (λ_n) et (μ_n) deux suites complexes. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $T_n = (X-\lambda_n)(X-\mu_n) = (X^2 - s_n X + p_n)$. On suppose que (s_n) et (p_n) converge vers des limites s et p vérifiant $s^2 = 4p$. Montrer que les suites (λ_n) et (μ_n) sont bornées, et en déduire qu'elles convergent.
2) Soit $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et si $t \neq 0$ $M_t = \begin{pmatrix} 1 + t\cos\frac{2}{t} & -t\sin\frac{2}{t} \\ -t\sin\frac{2}{t} & 1 - t\cos\frac{2}{t} \end{pmatrix}$.
   Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de M_t. Etudier leur comportement lorsque t tend vers zéro.
3) Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbf{C})$ convergeant vers une matrice A.

   Montrer que l'ensemble des valeurs propres des matrices A_n quand n décrit $\mathbf{N}$ est borné.

2 Exercices plus élaborés

A Manipulations sur les normes

□ **Exercice 29** Soit $\| \ \|$ une norme sur un espace vectoriel normé E ; montrer que :

1) $\forall\ (x,y,z,t)\ \in\ E\times E\times E\times E\ ,$
$\|x-y\|+\|z-t\|+\|x-z\|+\|y-t\|\ \geqslant\ \|x-t\|+\|y-z\|.$
2) $\forall\ (x,y,z)\ \in\ E\times E\times E\ ,$
$x+y+z=0\ \Rightarrow\ \|x-y\|+\|y-z\|+\|z-x\|\ \geqslant\ \frac{3}{2}(\|x\|+\|y\|+\|z\|)$
3) $\forall\ (x,y)\ \in\ (E\backslash\{0\})^2\ ,\ \ \|x-y\|\ \geqslant\ \frac{1}{2}\sup(\|x\|,\|y\|)\left\|\dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\right\|.$

□ **Exercice 30** Montrer que $N\ :\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ définie par $N(x,y)\ =\ \displaystyle\int_0^1|x+ty|\ \mathrm{d}t$ est une norme et représenter sa boule unité fermée.

B Comparaisons de normes

□ **Exercice 31** Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonalisable.

On suppose qu'il existe $\lambda\in\mathrm{Sp}(M)$ tel que : $\forall\alpha\in\mathrm{Sp}(M)\backslash\{\lambda\},\ |\lambda|>|\alpha|$.

Déterminer un équivalent simple de M^p quand p tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire une suite de matrices (A_p) telle que $M^p=A_p+\|A_p\|\varepsilon_p$ où (ε_p) est une suite de matrices convergeant vers la matrice nulle $n\times n$).

□ **Exercice 32** On pose $N:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$ définie par $N(x,y)=\displaystyle\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\frac{x+ty}{1+t^2}\right|.$

1) Montrer que est une norme sur $\mathbf{R}^2$.
2) Représenter graphiquement la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 et comparer N à la norme euclidienne.

□ **Exercice 33** Si $P\in E=\mathbf{R}[X]$, on pose $N_1(P)=\displaystyle\int_0^1|P(t)|\ \mathrm{d}t$ et $N_2(P)=\displaystyle\int_2^3|P(t)|\ \mathrm{d}t$

1) Les applications N_1 et N_2 sont-elles des normes sur E ? Si oui, sont-elles équivalentes ?
2) L'application $\psi\ :\ P\in\mathbf{R}[X]\mapsto\psi(P)\ =\ \displaystyle\int_0^1P(t)\ \mathrm{d}t$ est-elle lipschitzienne au sens de N_1 ? au sens de N_2 ?

□ **Exercice 34** On note $E=\mathscr{C}^1([0,1];\mathbf{R})$. On pose

$$N:f\in E\mapsto\left(|f(0)|^2+\int_0^1|f'(t)|^2\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'application N est-elle une norme ? Si oui, est-elle équivalente à la norme de la convergence uniforme ?

□ **Exercice 35** Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbf{R}^2$; montrer que : N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si :

$$\begin{cases}\forall\ r>0\ ,\ \exists\ s>0\ ,\ B^{N_1}(0,s)\subset B^{N_2}(0,r)\\ \forall\ r>0\ ,\ \exists\ s>0\ ,\ B^{N_2}(0,s)\subset B^{N_1}(0,r)\end{cases}$$

□ **Exercice 36** Soit $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$, et soit g donnée dans E.

Pour tout f dans E, on définit $N(f)=\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|f(x)g(x)|$.

1) Déterminer une CNS sur g pour que N soit une norme sur E.
2) On suppose que : $\forall\ x\in[0,1],\ g(x)\neq0$; montrer que N et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes.

C Applications linéaires lipschitziennes

□ **Exercice 37** Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$. Pour P élément de E, on pose $\|P\| = |P(0)| + |P(1)| + |P(2)| + |P(3)|$.

1) Démontrer que $\|.\|$ est une norme sur E.
2) Soit φ l'application de E dans E définie par $\varphi(P)(X) = P(X+2)$. Vérifier que φ est linéaire lipschitzienne et calculer sa norme subordonnée $\|\varphi\|_{\text{op}}$.

□ **Exercice 38** Soit E un espace vectoriel normé non réduit à $\{0_E\}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}_E$.

1) Calculer $u \circ v^n - v^n \circ u$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
2) Montrer que u ou v est discontinu.

□ **Exercice 39** On munit $E_k = \mathbf{R}_k[X]$ de la norme $\|P\|_k = \sum\limits_{i=0}^{k} |P(i)|$.

Soit $\varphi : E_2 \to E_1$ définie par $\varphi : P \mapsto X^2 P'$.
Vérifier que φ est linéaire lipschitzienne et calculer sa norme subordonnée $\|\varphi\|_{\text{op}}$.

□ **Exercice 40** On pose $E = \{f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbf{R}) / f(0) = 0\}$ et on le munit de la norme $\| \ \|_\infty$.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $T_n : E \to \mathbf{R}$ définie par

$$T_n : f \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f\left(\frac{1}{n}\right)$$

1) Montrer que T_n est lipschitzienne sur E.
2) Calculer sa norme subordonnée $\|T_n\|_{\text{op}}$.
3) La suite $(T_n)_{n \geqslant 1}$ est-elle convergente dans $\mathscr{L}_c(E, \mathbf{R})$?

□ **Exercice 41** Soit C l'espace vectoriel des suites complexes convergentes, C_0 le sous-espace de C des suites de limite nulle. Sur ces deux espaces vectoriels on considère la norme infinie :

$$\forall (x_n) \in C, \|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

Pour $x = (x_n) \in C$, on note $\ell(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

On considère $T : C \to C_0$ défini par

$$T : x \mapsto (\ell(x), x_0 - \ell(x), x_1 - \ell(x), \cdots, \cdots)$$

1) Montrer que T est bien définie, linéaire, bijective et que T et T^{-1} sont linéaires et lipschitziennes.
2) Calculer les normes subordonnées $\|T\|_{\text{op}}$ et $\|T^{-1}\|_{\text{op}}$.

□ **Exercice 42** Soit $E = (\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R}), \|.\|_\infty)$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & f & \longmapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right) \end{array}$$

Démontrer qu'elle est linéaire, lipschitzienne et calculer la norme subordonnée $\|\varphi\|_{\text{op}}$.

Peut-on trouver une fonction f telle que $\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_\infty} = \|\varphi\|_{\text{op}}$?

D Suites de matrices

□ **Exercice 43** Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ (α est un réel).

□ **Exercice 44** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On définit la suite de matrices (A_n) par :

$A_0 = A$, et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $A_n = \frac{1}{2}\Big(A_{n-1} + 3(A_{n-1})^{-1}\Big)$

1) Diagonaliser A_0.
2) Montrer que A_n est définie pour tout n.
3) Montrer que la suite (A_n) converge et déterminer sa limite.

□ **Exercice 45** Soit $R_n \in \mathbf{R}_3[X]$ le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par X^4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R_n}{n^3}$.

□ **Exercice 46** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que la suite $(A^p)_{p\in\mathbf{N}}$ admet une limite $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Déterminer A et L.

□ **Exercice 47** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$, $p \geqslant 2$. On dira que A est la matrice bande $[-1, 3, -1]$.

Le but de cet exercice est de mettre en place une méthode itérative de résolution approchée d'un système linéaire, en utilisant un “schéma de point fixe” (on écrit un système équivalent dont la solution est le point fixe d'une application, qu'on approche à l'aide d'une suite récurrente).

1) Démontrer que cette matrice est inversible. On note X^* l'unique solution du système linéaire $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^\top$: $X^* = A^{-1}B$.

   Le système $AX = B$ est équivalent au système $X = CX + \frac{1}{3}B$ avec C matrice bande à préciser.

   Soit T l'application de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^p$ définie par $X \longmapsto CX + \frac{1}{3}B$. Quel est le vecteur $T(X^*)$?
2) Question à résoudre avec Python : on suppose ici p=5.

   Construire les matrices A, C, le vecteur B, et la transformation T.

   Confirmer l'inversibilité de A. Expliciter alors X^*, puis une valeur approchée de ce vecteur.

   Vérifier la valeur attendue pour $T(X^*)$.
3) On munit $\mathbf{R}^p$ de la norme $\| \ \|_\infty$ associée à la base canonique. Montrer alors que T est $k-$lipschitzienne avec une constante $k \in]0, 1[$ à préciser.

   Montrer qu'en partant d'un vecteur X_0 arbitraire, la suite (X_n) définie par la récurrence

   $X_{n+1} = TX_n$ (pour tout naturel n) converge vers X^*
4) A partir d'une majoration de $\|X_{n+1} - X_n\|_\infty$, puis de $\|X_{n+p} - X_n\|_\infty$ à l'aide de $\|X_1 - X_0\|_\infty$, établir la formule : $\|X^* - X_n\|_\infty \leqslant \frac{k^n}{1-k} \|X_1 - X_0\|_\infty$.
5) On choisit $X_0 = 0$. Soit $\varepsilon = 10^{-2}$; avec Python, construire les termes de la suite (X_n) nécessaires pour obtenir une valeur approchée de X^* à ε près. (au sens de $\| \ \|_\infty$).

   On pourra choisi d'écrire une procédure ou non. Comparer avec la valeur approchée de X^* lorsque $p = 5$.

CHAPITRE 10

Séries entières

1 Applications du cours

A Rayon de convergence

□ **Exercice 1** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum_{n\geqslant 0} (3n^2+2n)\,x^n$ b) $\sum_{n\geqslant 0} (2^n+3^{n+1})\,x^n$

c) $\sum_{n\geqslant 0} n^n x^n$ d) $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{(\ln n)^n} x^n$

e) $\sum_{n\geqslant 1} \arctan(n^\alpha) x^n$ où $\alpha \in \mathbf{R}$ f) $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \dfrac{\binom{2n}{n}}{2n-1} x^n$

g) $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\dfrac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) x^n$ h) $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{n^n}{n!} x^n$

i) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\operatorname{sh}(n)}{\operatorname{ch}^2(n)} x^n$ j) $\sum_{n\geqslant 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} x^n$

□ **Exercice 2** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ dans les cas suivants

1) pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{n}$ si n est pair et $\dfrac{\operatorname{sh}(n)}{n}$ si n est impair

2) pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$

3) pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx$.

□ **Exercice 3** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ avec

$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, et étudier la convergence en R et en $-R$.

□ **Exercice 4** Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n|\, z^n$ ont même rayon de convergence.

□ **Exercice 5** On suppose que $\sum a_n z^n$ a pour rayon $R > 0$. Quel est celui de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

□ **Exercice 6** (Série entière qui ne converge ni normalement ni uniformément sur $D(0,R)$) :

1) cas R fini, $R>0$: étudier la convergence normale puis uniforme de $\sum (x \longmapsto x^n)$ sur $]-1,1[$.
2) cas $R=+\infty$: étudier la convergence normale puis uniforme de $\sum \left(x \longmapsto \frac{x^n}{n!}\right)$ sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 7** Soit $a \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$. Convergence et somme de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{(\sin a)^n} \frac{x^n}{n!}$.

□ **Exercice 8** Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum (d_n x^n)$ avec :

1) d_n est le nombre de diviseurs de n.
2) d_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de π.

□ **Exercice 9** On pose pour tout entier naturel k : $u_k = \frac{1}{k^2+1}$.

1) Justifier que $\sum \frac{1}{k^2+1}$ est convergente, on pose $a_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$.
2) Déterminer le rayon de convergence de $\sum (a_n x^n)$

B Calculs de sommes

□ **Exercice 10** Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n-3}{(n-1)!} x^n$.

□ **Exercice 11** Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

1) Déterminer pour quelles valeurs de x les deux séries ci-dessus sont convergentes.
2) Calculer $f(x)$.

□ **Exercice 12** Déterminer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^n$.

□ **Exercice 13** On pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

1) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2) Montrer que f est continue sur D.
3) Calculer $f(x)$ sur cet ensemble.
4) Déterminer : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.

□ **Exercice 14** Rayon de convergence et somme de la série entière : $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

□ **Exercice 15** On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch}(n)}{n} x^n$.

Calculer son rayon de converge et sa somme $S(x)$ pour x dans l'intervalle ouvert de convergence.

□ **Exercice 16** On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1} x^n$.

On note R son rayon de convergence et f sa somme définie sur $]-R,R[$.

1) Montrer que : $\forall x \in]-R,+R[, 2f(x) = (1+4x)f'(x)$.
2) En déduire f.

□ **Exercice 17** Soit a un réel. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \cos(na)\frac{x^n}{n}$, puis calculer sa somme.

□ **Exercice 18** Soit la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$; déterminer son rayon de convergence et sa somme.

□ **Exercice 19** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$.

□ **Exercice 20** Déterminer le rayon de convergence et la somme de : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+2}{n(n+1)}x^n$.

□ **Exercice 21** Déterminer le rayon de convergence et la somme de : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$.

□ **Exercice 22** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

□ **Exercice 23** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+2)2^n}$.

□ **Exercice 24** Convergence et somme de la série entière : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n}$.

Calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n}$.

□ **Exercice 25** On pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Calculer $f(x)$ sur cet ensemble.
3) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

□ **Exercice 26** Soit la série entière $\sum \left(\frac{n!}{1.3.\cdots.(2n+1)}x^{2n+1}\right)$.

1) Déterminer son rayon de convergence.
2) Déterminer sa somme f.

   On pourra chercher une équation différentielle vérifiée par f.

□ **Exercice 27** Convergence et somme de la série entière : $\sum_{n\geqslant 0} (n^2+1)2^{n+1}x^n$.

□ **Exercice 28** Rayon de convergence et somme de la série entière :

$\sum_{n\geqslant 0} (\,\mathrm{ch}\,(0) + \mathrm{ch}\,(1) + \mathrm{ch}\,(2)\cdots + \mathrm{ch}\,(n))\,x^n$.

□ **Exercice 29** Soit la suite $a_n = \frac{1}{10} + \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

□ **Exercice 30** On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n(n+2)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2) Calculer $f(x)$ sur D.

□ **Exercice 31** Soit $\theta \in]0,\pi[$, et les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} \sin(k\theta)x^k$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(k\theta)}{k}x^k$

Déterminer leur rayon de convergence et leur somme.

□ **Exercice 32** Soit (a_n) une suite telle que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$.

Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

□ **Exercice 33** Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k+3}\, x^k$ pour $x \in]-1,1[$.

□ **Exercice 34**

Soit la série de fonctions $\sum (u_n)$ où $u_n \ : \ x \longmapsto \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{2n+1}}{4n+3}$.

1) Déterminer son domaine de convergence D.
2) Donner une expression simple de f. Déterminer $\ell = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
3) Montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. En déduire $f(1)$.
4) Comparer ℓ et $f(1)$. Cela contredit-il le théorème d'Abel radial ?

C Développements en séries entières

□ **Exercice 35** Soit $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 - 2(\operatorname{ch}\alpha)x + 1}\right)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Développement en série entière de f.

□ **Exercice 36**

1) Rappeler les développements en séries entières de $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \ln(1-x)$.
2) Soit la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)}_{n\geqslant 0}$; déterminer son rayon de convergence et sa somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
3) En déduire la somme pour $x = 1$.

□ **Exercice 37** Développer en série entière en 0 : $x \longmapsto \arctan\left(\frac{2(x+3)}{x-2}\right)$.

□ **Exercice 38** Donner le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto e^x \sin(x)$.

□ **Exercice 39** Former le développement en série entière en 0 de :

1) $x \longmapsto \dfrac{\sin(4x)}{\sin(x)}$ 2) $x \longmapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$ 3) $x \longmapsto \ln\left(\frac{2-x}{3-x^2}\right)$

4) $x \longmapsto \arctan\left(\frac{x\sin a}{1-x\cos a}\right)$, $a \in \mathbf{R}$ 5) $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$, 6) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos(\alpha) + 1}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$

□ **Exercice 40** Développer en série entière en 0 la fonction $f \ : \ x \longmapsto \ln\left(1 + \frac{x^2}{1+x}\right)$.

□ **Exercice 41** Développement en série entière au voisinage de 0 de $x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)$.

□ **Exercice 42** Former le développement en série entière en 0 de :

$x \longmapsto \arctan(x+1)$, $x \longmapsto \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\tan\alpha\right)$, $x \longmapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$.

□ **Exercice 43** Développer en série entière autour de 0 de $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 44** Soit f la fonction de variable réelle x définie par : $f(x) = \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$.

Développer f en série entière à l'origine et déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

□ **Exercice 45** Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Montrer que f est développable en série entière
2) Chercher une équation différentielle vérifiée par f de la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \text{ où } a, b, c \text{ sont des fonctions polynômiales.}$$

3) Déterminer le développement en série entière de f.
4) En déduire le développement en série entière de $x \mapsto (\arcsin(x))^2$.

D Études de fonctions définies comme sommes de séries entières

□ **Exercice 46** Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n-1} x^n$

1) Calculer le rayon de convergence R et étudier la nature de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.
2) Calculer la somme de la série.
3) Equivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

□ **Exercice 47** Soit $a \in \mathbf{R}$ tel que $|a| < 1$. Soit $S : [0, 1[\to \mathbf{R}$ définie par $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a^n}{1 - x^n}$.

1) Montrer que S est continue sur $[0, 1[$.
2) Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 1.

□ **Exercice 48** Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$, où p est un entier naturel.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f.
2) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1.

E Divers

□ **Exercice 49** Soit $\sum (a_n z^n)_{n\in\mathbf{N}}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \geqslant 0$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

i) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge uniformément sur $D(0, R)$.

ii) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D(0, R)}$

iii) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge uniformément sur le cercle $\mathscr{C}(0, R)$

□ **Exercice 50** Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x > \sin(1)$.

□ **Exercice 51** Soit (a_n) une suite bornée de nombres réels. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries entières $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum a_n x^n$? On note f et g leurs sommes respectives.

Soit $x \in]0, 1[$.

1) Montrer que $t \mapsto e^{-t/x} f(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$
2) Etablir : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} f(t)\, \mathrm{d}t = x g(x)$

□ **Exercice 52**

1) Montrer que le prolongement par continuité de $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
2) Même question pour $x \longmapsto \frac{\arctan x}{x}$, et pour $x \longmapsto \frac{\ln x}{x-1}$ sur $]0,+\infty[$.

□ **Exercice 53** Soient deux suites de terme général a_n et b_n réels positifs vérifiant :

$$a_0 = 0 \ , \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \ , \ b_0 = a_0 \ , \ b_1 = a_1 \ , \ \forall\, n \geqslant 2 \ , \ b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k}$$

1) Donner une majoration simple de chacune de ces suites. Qu'en déduit-on pour les rayons de convergence R_a et R_b de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ respectivement ?
2) Soient $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, montrer que :

$$\forall\, z \in \mathbf{C} \ , \ |z| < 1 \Longrightarrow g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)}$$

3) En déduire que la série $\sum b_n$ diverge. Que vaut R_b ?

□ **Exercice 54** (théorème de Liouville)

Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1) Montrer que pour tout $r \in]0, R[$ et pour tout naturel n :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta = 2\pi r^n a_n$$

2) Montrer que si $R = +\infty$ et f est bornée sur $\mathbf{C}$, alors f est constante.

F Séries entières et intégrales

□ **Exercice 55** Soit $S(x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$.
Déterminer le rayon de convergence et exprimer S sous forme intégrale.

□ **Exercice 56** Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

On pourra utiliser la série entière $\sum \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

□ **Exercice 57** Montrer que : $\forall\, x \in [0,1[, \ \displaystyle\int_0^x \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Montrer par deux méthodes que c'est encore vrai pour $x = 1$.

□ **Exercice 58** Montrer que : $\forall\, x \in [-1,1] \ , \ \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$

En déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

□ **Exercice 59** Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

□ **Exercice 60** Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n\,(4n+1)}$.

□ **Exercice 61** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que a_n existe, et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
2) Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^{2n}$.

□ **Exercice 62** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t$.

1) Calculer a_n.
2) Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$? Calculer sa somme.

□ **Exercice 63** On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta$. Rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$. Calcul de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n$.

On pourra poser $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

□ **Exercice 64** Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t}{t^2+1}\right)^n \mathrm{d}t$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1) Montrer que S est définie sur $[-2, 2, [$.
2) Exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.

□ **Exercice 65** On pose $u_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-(n-1))\,\mathrm{d}t$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{u_n}{n!}x^n$.

2 Exercices plus élaborés

A Rayon de convergence

□ **Exercice 66** Soit la série entière $\sum (-1)^n \frac{n!}{n^n} x^{3n+1}$

1) Déterminer son rayon de convergence.
2) Etude en $x = R$ et en $x = -R$.

□ **Exercice 67**

1) Justifier la convergence de la série de terme général $u_k = \frac{1}{k(\ln k)^3}$.
2) On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^3}$ pour $n \geqslant 3$.

   Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} a_n x^n$.

B Calculs de sommes

□ **Exercice 68** Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

□ **Exercice 69** Soit la suite (a_n) telle que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3} = \frac{11}{6}a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n$, avec $a_0 = 1$, $a_1, a_2 \in]0, +\infty[$ donnés.

1) Soit $A_n = \max\{|a_n|, |a_{n+1}|, |a_{n+2}|\}$.
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $A_{n+1} \leqslant 3A_n$.
2) Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum (a_n x^n)$?
3) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
4) En déduire a_n en fonction n.

C Développements en série entière

□ **Exercice 70** Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\cos(t))\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier que f est développable en série entière en 0
2) Déterminer son développement en série entière.

□ **Exercice 71** Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^p$, avec p naturel non nul.

Développer f en série entière en 0.

□ **Exercice 72** Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$.

On suppose que pout tout $x \in]-a, a[$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

1) Pour tout entier n, on pose $R_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

   Montrer que pour tout couple $(x, y) \in]0, a[^2$,

$$x < y \Rightarrow \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}.$$

   On pourra utiliser un changement de variables pour exprimer les intégrales.
2) En déduire que f est la somme de sa série de Taylor sur $[0, a[$ puis sur $]-a, a[$

D Études de fonctions définies comme sommes de séries entières

□ **Exercice 73** Soit (a_n) une suite de réels qui converge vers $a \neq 0$.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n} x^n$.
2) Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} x^n$ pour $x \in]-1, 1[$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1.

   On pourra développer $x \longmapsto f(x) + a\ln(1-x)$ *en série entière en* 0.

□ **Exercice 74**

1) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \ln(n)x^n$.
2) Si $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$, montrer que : $S(x) \underset{1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

E Divers

□ **Exercice 75** Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{(n^2)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f ; montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{(t^2)}\,\mathrm{d}t$. Etudier F et montrer qu'il existe C tel que : $F(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{C}{\sqrt{1-x}}$.

3) En déduire un équivalent de f en 1^-.

□ **Exercice 76** (Série entière à valeurs réelles)

Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que pour tout $z \in D(0,R)$ on a $f(z) \in \mathbf{R}$. Montrer que f est constante.

F Séries entières et intégrales

□ **Exercice 77** Soit la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer son domaine de convergence.

2) La somme est-elle intégrable sur $[0,1[$?

□ **Exercice 78** Pour p entier naturel non nul, on définit la fonction $F_p : x \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^p}$.

1) Déterminer le rayon de convergence puis le domaine de définition de F_p.

2) Soit $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que Γ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

3) Déterminer un équivalent de F_p quand x tend vers 1^- (à exprimer en fonction de Γ).
On pourra utiliser la comparaison série-intégrale, avec
$f : u \mapsto x^{u^p}$

□ **Exercice 79** Soit a un réel strictement positif; on considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^n}{n+a}$.

1) Déterminer son rayon de convergence.

2) Continuité et expression intégrale de la somme.

□ **Exercice 80** Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

3) Calculer la somme de la série sur $]-R,R[$

4) Étudier $S(x)$ en R et en $-R$.

□ **Exercice 81** Utilisation des intégrales de Wallis : développement en séries entières d'une intégrale dépendant d'un paramètre, formule de Stirling

1) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, pour $n \in \mathbf{N}$.

   a) Montrer que : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

   b) Sans calculer I_n, montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

   c) Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, et strictement positive.

   d) Calculer I_n (former une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}), donner plusieurs écritures de I_n.

e) Justifier que : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, et en déduire la limite de la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$.

f) Montrer que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante, donner la valeur de cette constante.

g) Déduire des deux questions précédentes que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2) Soit la fonction $F\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x\cos^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$.

a) Montrer que F est définie pour $x < 1$; que se passe-til pour $x = 1$?

b) Etudier sans calcul le sens de variations de F.

Montrer que F est continue sur $]-\infty, 1[$.

c) Donner le développement en série entière de $X \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-X}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n$ et son intervalle ouvert de convergence. Comparer α_n et I_{2n}.

d) Montrer que $x \longmapsto F(x)$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$, et déterminer son développement.

3) Formule de Stirling

a) Pour $n \geqslant 1$ on pose : $a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$, et $b_n = \ln(a_n)$. Montrer que la suite b_n est convergente.
On pourra étudier la nature de la série de terme général : $t_n = b_{n-1} - b_n$.

b) En déduire que la suite (a_n) converge vers un réel $\ell > 0$.

c) Calculer ℓ en utilisant a).

En déduire la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$.

□ **Exercice 82** Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2(t))\,\mathrm{d}t$$

Étudier la convergence de la série obtenue aux bornes de l'intervalle de convergence.
Calculer f.

On pourra montrer que f est dérivable, calculer f' et en déduire f.

□ **Exercice 83** Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction
$f : x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$, et calculer $f(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.

□ **Exercice 84** Soient x, t réels, $|x| < 1$.

1) Calculer $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x-e^{it}}\right)$.

2) Ecrire $\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$ sous la forme d'une série.

3) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)\right)^2\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$.

□ **Exercice 85** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $a_0 = 1$ et $\forall n > 0,\ a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$.

(on peut montrer que a_n est le nombre de mots de parenthèses de longueur $2n$)

On note R_a le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et f sa fonction somme.

1) Pour tout x tel que $|x| < R_a$, former une équation du second degré vérifiée par $f(x)$.
On pourra utiliser un produit de Cauchy.

2) Montrer que $R_a \leqslant \frac{1}{4}$. En déduire une expression de f sur $]-R_a, R_a[$.

3) En supposant que $R_a > 0$, exprimer a_n en fonction de n.

4) Faire une synthèse.

CHAPITRE 11

Espaces préhilbertiens I

1 Applications du cours

A Produit scalaire : généralités

□ **Exercice 1** Soit E un espace euclidien et $(x,y) \in E^2$; calculer $\| \, \|y\|^2 x - (x|y)y \, \|^2$ et retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et l'étude du cas d'égalité.

□ **Exercice 2** Soit $E = \mathbf{R}[X]$, $\forall\,(P,Q) \in E^2$, on pose
$(P|Q) = \frac{1}{4}(P(1)Q(1) + 2P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1))$.

1) $(\;|\;)$ est-il un produit scalaire sur E ?
2) $(\;|\;)$ est-il un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$? Base orthonormale ?

□ **Exercice 3** Soit $E = \mathbf{R}\left[X\right]$ est muni du produit scalaire :

$$(P\,|\,Q) = \int_0^1 P\left(t\right)Q\left(t\right)dt$$

Soit P_0 un polynôme non nul, et $F_0 = P_0.\mathbf{R}\left[X\right]$ l'ensemble des multiples de P_0

Montrer que F_0 est un sous-espace-vectoriel de $\mathbf{R}\left[X\right]$. Déterminer $(F_0)^{\perp}$.

□ **Exercice 4** Trouver les fonctions f continues sur $[a,b]$ telles que : toute fonction g continue sur $[a,b]$ vérifiant $\displaystyle\int_a^b g\left(t\right)\,\mathrm{d}t = 0$ vérifie également $\displaystyle\int_a^b f\left(t\right)g\left(t\right)\,\mathrm{d}t = 0$.

□ **Exercice 5**

1) Soient $a < b$; on suppose que h est continue sur $[a,b]$, et à valeurs réelles positives.

   Montrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h \equiv 0$.
2) Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On définit :

$$\forall (f,g) \in E \times E \quad , \quad (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

   Montrer que $(\;|\;)$ est un produit scalaire sur E.

□ **Exercice 6** Soit E un espace euclidien, trouver une condition nécessaire et suffisante sur un couple $(x,y) \in E^2$ pour que : $\|x - y\| = |\|x\| - \|y\||$.

B Familles de vecteurs, orthogonales ou autres

□ **Exercice 7** Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque de E espace vectoriel euclidien. Montrer que : $\forall\ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n\ ,\ \exists!\, x \in E,\ ,\ \forall\ i \in \{1, \ldots, n\}\ ,\ (x|e_i) = a_i$.

□ **Exercice 8** Soit E un espace vectoriel euclidien, et $(u, v) \in E^2$ tel que $\|u\| = \|v\| = 1$.

Montrer que $(u + v, u - v)$ est une famille orthogonale de E ; en déduire un procédé de construction d'une base orthonormale d'un plan vectoriel de E de base (a, b) (a et b non nécessairement unitaires).

□ **Exercice 9** Soit E un epace euclidien, $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E et $p \in \{2, \cdots, n-1\}$.

On note $F = \{x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\ /\ \sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, en trouver une base, donner sa dimension, déterminer $F^\perp$.

C Polynômes orthogonaux

□ **Exercice 10** Polynômes de Tchebychev :

1) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}[X]$ tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

2) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ en posant :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2 \quad (P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

On commencera par vérifier que l'intégrale converge.

Calculer $(T_m|T_n)$, pour $(m, n) \in \mathbf{N}^2$.

D Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

□ **Exercice 11** Soit E un espace euclidien de dimension 3, dont (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormal ; soient trois réels α, β, γ tels que : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Soit P le plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Donner la matrice (dans la base (e_1, e_2, e_3)) de la projection orthogonale sur P et la matrice de la réflexion par rapport à P.

□ **Exercice 12** Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne usuelle, et $F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, déterminer sa dimension et en donner une base.
2) Déterminer la matrice, relativement à $\mathscr{B}$, de la projection orthogonale sur F.

□ **Exercice 13** Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne usuelle, et $F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, déterminer sa dimension et en donner une base.

2) Déterminer la matrice, relativement à $\mathscr{B}$, de la symétrie orthogonale sur F.

□ **Exercice 14** L'espace $\mathbf{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Déterminer l'image du plan d'équation $x+y+z=0$ par le retournement d'axe D défini par $x+2y=0$ et $x+y-z=0$.

□ **Exercice 15** Soit U une matrice colonne à n éléments réels telle que $U^\top U = 1$.

Quelle est la nature de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de matrice $A = I_n - 2\,UU^\top$?

□ **Exercice 16** Soit E un espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base orthonormale ; caractériser les endomorphismes dont les matrices dans cette base sont :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 17** Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$, muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$

Trouver une base orthonormée de H où $H = \{P \in E / P(1) = 0\}$. Déterminer le projeté orthogonal sur H de X^3.

□ **Exercice 18** Soit (P) le plan d'équation : $x+y+z=0$.

1) Déterminer la matrice A, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur P.
2) La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ? éléments propres ?

□ **Exercice 19** Soit $(E, (.|.))$ un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur orthogonal.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{rg}(p)$.

E Distance à un sous-espace vectoriel

□ **Exercice 20** On munit $\mathbf{R}_2[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Chercher une base orthonormale et déterminer : $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 21** Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^1 x^2(\ln x - ax - b)^2\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 22** Calculer : $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^\pi (x - a\cos(x) - b\sin(x))^2\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 23** Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$; soit l'application $(\ |\ )$ définie sur E^2 par :

$\forall P, Q \in E,\ P = \sum\limits_{k=0}^n a_k X^k,\ Q = \sum\limits_{k=0}^n b_k X^k\ ,\ (P|Q) = \sum\limits_{k=0}^n a_k b_k$.

1) Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E.
2) Montrer que $H = \{P \in E / P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E ; en donner sa dimension et une base.
3) Déterminer $p(1)$, où p est la projection orthogonale sur H, puis $d(1, H)$.
4) Déterminer $p(X)$, où p est la projection orthogonale sur H, puis $d(X, H)$.

□ **Exercice 24** On munit $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire usuel. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ ayant des 1 sur toute sa première ligne et des zéros partout ailleurs. Soit F l'espace $\mathrm{vect}(I, U, \dots, U^{n-1})$ où U est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la projection orthogonale de A sur F. Calculer $\mathrm{d}(A, F)$.

□ **Exercice 25** Soit $E = \mathbf{R}[X]$, montrer que l'application

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}[X] \quad , \quad (P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur E.

Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2\,\mathrm{d}t$.

F Adjoint

□ **Exercice 26**

1) Soit E un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$; montrer que $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.
2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$; comparer $\mathrm{Ker}(A^\top A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.

□ **Exercice 27** Soit E un espace euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ et f^* son adjoint. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f^*) = (\mathrm{Im} f)^\perp \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Ker} f)^\perp$$

□ **Exercice 28** $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est muni du produit scalaire usuel et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer l'adjoint de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \phi_A : & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ & M & \longmapsto & AM \end{array}$$

□ **Exercice 29** Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

Montrer que $\|u\|_{\mathrm{op}} = \|u^*\|_{\mathrm{op}} = \sqrt{\|u \circ u^*\|_{\mathrm{op}}} = \sqrt{\|u^* \circ u\|_{\mathrm{op}}}$

(On procédera par inégalités)

G Isométries vectorielles

□ **Exercice 30** On considère $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée usuelle. Pour tous réels strictement positifs a, b, c on note $M(a, b, c)$ la matrice

$$M(a,b,c) = -2/3 \begin{pmatrix} -1/2 & b/a & c/a \\ a/b & -1/2 & c/b \\ a/c & b/c & -1/2 \end{pmatrix}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in O_3(\mathbf{R})$, pour que $M \in O_3^+(\mathbf{R})$.

Décrire les transformations associées à ces matrices $M(a, b, c)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

□ **Exercice 31** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b pour que A soit une matrice orthogonale ; déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

□ **Exercice 32** Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ qui sont symétriques et orthogonales.

□ **Exercice 33** Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall\ (x, y) \in E \times E\ ,\ \ (x|y) = 0 \implies (f(x)|f(y)) = 0$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[\ ,\ \forall\ (x, y) \in E \times E\ ,\ (f(x)|f(y)) = \alpha(x|y)$.

□ **Exercice 34** L'espace $\mathbf{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle. Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe orienté par $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$.

□ **Exercice 35** Soient E un espace vectoriel euclidien, u un vecteur non nul de E et λ un réel non nul.
On considère l'application $f : E \to E$ définie par

$$f : x \mapsto x + \lambda(u|x)u$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ et u pour que f soit une isométrie vectorielle de E. Déterminer alors f.

□ **Exercice 36** Soient E un espace vectoriel euclidien et u une isométrie vectorielle de E.
On suppose qu'il existe un vecteur x de E tel que $u(x) \neq x$, on pose $y = u(x)$.

1) Démontrer qu'il existe une unique réflexion s de E telle que $s(x) = y$.
2) Démontrer que : $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$.
3) Démontrer que : $\dim\Big(\mathrm{Ker}(s \circ u - \mathrm{id}_E)\Big) > \dim\Big(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)\Big)$.
4) Démontrer, par récurrence, que tout automorphisme orthogonal de E est une composée de réflexions.

□ **Exercice 37** Soit la matrice : $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est une matrice orthogonale.
2) Déterminer les caractéristiques de l'isométrie représentant A dans une base orthonormale directe.

□ **Exercice 38** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et $\mathscr{B}$ une base orthonormale directe de E. Déterminer la nature de l'endomorphisme f tel que
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -4 & -4 & 7 \\ 1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 39** Soit $R = a\begin{pmatrix} 1 & 1-b & 1+b \\ 1+b & 1 & 1-b \\ 1-b & 1+b & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ pour que R soit une matrice de rotation.

2 Exercices plus élaborés

A Produit scalaire : généralités

□ **Exercice 40** Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $a, b \in E$ fixés. Déterminer les bornes inférieures et supérieures de

$$\left\{ \frac{(x|a)(x|b)}{\|x\|^2} \; ; \; x \in E \setminus \{0\} \right\}$$

□ **Exercice 41** Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$, dont la norme euclidienne associée est notée $\|\ \|$.

Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E \ , \ \ \|f(x)\| \leqslant \|x\|$$

On se propose de montrer par deux méthodes que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E.

1) a) Soit (x, y) un couple de vecteurs fixé appartenant à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \times E$.

En utilisant la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \ , \ \ \varphi(\lambda) = \|f(\lambda x + y)\|^2 - \|\lambda x + y\|^2$$

montrer que $(x|f(y) - y) = 0$.

Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$ sont orthogonaux.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E.

2) On se propose de retrouver ce résultat autrement :

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$; il existe donc un vecteur y de E tel que : $x = f(y) - y$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, f^n(y) = nx + y$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \|x\| \leqslant \frac{2}{n}\|y\|$, puis que $x = 0_E$.
Conclure.

B Familles de vecteurs, orthogonales ou autres

□ **Exercice 42** Soit E un espace euclidien, $p \in \mathbf{N}^*$, $(e_1, \ldots, e_p) \in E^p$ tel que :

$$\begin{cases} \forall\ i \in \{1, \ldots, p\} \ , \ \ \|e_i\| = 1 \\ \forall\ x \in E \ , \ \ \sum\limits_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 = \|x\|^2 \end{cases}$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille orthonormale, puis une base de E.

□ **Exercice 43** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale d'une espace vectoriel euclidien E, et soient $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$.

$\forall\ i \in [\![1, n]\!]$, on pose $v_i = u_i + e_i$. Montrer que si : $\sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < 1$, alors $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre.

□ **Exercice 44** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n ; montrer qu'il existe n vecteurs $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ tels que :

$$\begin{cases} \text{i)} \quad \forall\ i \in \{1, \ldots, n\} \ , \ \ \|u_i\| = 1 \\ \text{ii)} \quad \forall\ (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \ , \ \ i \neq j \implies \|u_i - u_j\| = 1 \end{cases}$$

Indications : déterminer une propriété équivalente à la condition ii) (pour une famille de vecteurs unitaires), et ne portant que sur les $(u_i|u_j)$; montrer que si une telle famille existe, c'est une base de E ; ensuite, on pourra procéder par récurrence sur $n = \dim E$.

□ **Exercice 45** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n ; montrer que le cardinal maximal d'une famille $(u_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ de vecteurs de E vérifiant :
$\forall\ i,j\ \in\ \{1,\dots,p\}\ ,\ i \neq j\ \Longrightarrow\ (u_i|u_j) < 0$ est $n+1$.

□ **Exercice 46** Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une suite de vecteurs unitaires distincts dans un espace vectoriel euclidien E ; on suppose qu'il existe α tel que :
$\forall\ (i,j)\ \in\ \{1,\dots,n\}^2\ ,\ i \neq j\ \Longrightarrow\ (u_i|u_j) = \alpha$ et $(u_1,\dots,u_n)$ liée.

1) Montrer que : $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = 0$ et que $\dim(\text{vect}(u_1,\dots,u_n)) = n-1$.
2) Montrer que $\alpha = -\frac{1}{n-1}$. Construire un tel système par récurrence sur n.

□ **Exercice 47** Inégalité d'Hadamard :

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \geqslant 1$.

1) Montrer que :

$$\forall\ (x_1,x_2,\dots,x_n)\ \in\ E^n\ ,\ \ |[x_1,x_2,\dots,x_n]|\ \leqslant\ \|x_1\|\ \|x_2\|\dots\|x_n\|$$

2) Montrer que si tous les x_i sont non nuls, on a égalité si et seulement si $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est une base orthogonale de E.

□ **Exercice 48** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $(C_1,\cdots,C_n)$ ses vecteurs colonnes ; $\|\ \|$ désigne la norme euclienne usuelle sur $\mathbf{R}^n$.

1) Montrer que : $|\det(A)| \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} \|C_i\|$.
2) On suppose maintenant que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{ij}| \leqslant 1$.

   Montrer que : $|\det(A)| \leqslant n^{\frac{n}{2}}$ et trouver une matrice $(2,2)$ vérifiant l'égalité.

□ **Exercice 49** Déterminant de Gram :

soit E un espace vectoriel euclidien, $n \in \mathbf{N}^*$, $n \leqslant \dim E$, $(u_1,...,u_n) \in E^n$ et $\mathscr{B} = (e_1,...,e_n)$ une base orthonormale d'un sous-espace de E contenant $u_1,...,u_n$; on note A la matrice du système $(u_1,...,u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ et $G(u_1,...,u_n)$ la matrice $((u_i|u_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, appelée *matrice de Gram* du système $(u_1,...,u_n)$.

1) Montrer que $G(u_1,...,u_n) = A^\top A$. En déduire, lorsque $n = \dim E$, la propriété du produit mixte :

$$[u_1,...,u_n]^2 = \det G(u_1,...,u_n)$$

2) Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}\,(A^\top A)$; en déduire $\text{rg}(u_1,...,u_n) = \text{rg}(G(u_1,...,u_n))$.
3) Soit F un sous-espace strict de E muni d'une base $(b_1,...,b_p)$ et v un vecteur de E. Montrer que la distance d de v à F est donnée par :

$$d^2 = \frac{\det G(b_1,...,b_p,v)}{\det G(b_1,...b_p)}.$$

□ **Exercice 50** Soit $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de vecteurs de l'espace euclidien $(E,(.)\,)$ de dimension n.
On suppose que pour tout i, $\|u_i\| = 1$ et pour tous i,j distincts : $\|u_i - u_j\| = 1$. Montrer que la famille $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ est libre.
Montrer ensuite qu'une telle famille existe dans E.

C Polynômes orthogonaux

□ **Exercice 51** Polynômes de Laguerre :
soit $E = \left\{f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R} \;/\; f \text{ continue et } t \mapsto [f(t)]^2\, e^{-t} \text{ intégrable sur } \mathbf{R}^+\right\}$.

1) Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel contenant $\mathbf{R}[X]$ et que

   $(f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2) On pose : $\forall n \in \mathbf{N} \quad L_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot e^x \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n e^{-x}\right)$.

   Montrer que L_n est une fonction polynôme ; expliciter L_n.
3) Pour $m \leqslant n$, calculer $(L_n|X^m)$ et $(L_n|L_m)$.

D Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

□ **Exercice 52** Soit E un espace vectoriel euclidien et p une projection vectorielle de E ; montrer que :
(p est une projection orthogonale) $\iff$ $(\forall\, x \in E \;,\; \|p(x)\| \leqslant \|x\|)$.

□ **Exercice 53** Soit E un espace euclidien. On considère deux projecteurs orthogonaux p et q de E tels que $q - p$ soit un projecteur de E.

1) Démontrer que pour tout x dans E : $(p(x)|x) = \|p(x)\|^2$, puis que

   pour tout x dans $\mathrm{Im}(p)$, on a : $(q(x)|x) = \|x\|^2$. On pourra utiliser qu'un projecteur orthogonal a pour adjoint lui-meême.
2) Démontrer que $q \circ p = p$. Que vaut $p \circ q$? Cela reste-t-il vrai pour des projecteurs quelconques dont la différence est un projecteur ?

E Distance à un sous-espace vectoriel

□ **Exercice 54** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Soit $S_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices (n,n) symétriques réelles.

Déterminer $\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-m_{ij})^2 \;/\; M = (m_{ij}) \in S_n(\mathbf{R})\right\}$.

□ **Exercice 55** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Existe-t-il des solutions à $AX = b$?
2) Interpréter. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathbf{R}^3$ vérifiant

   $\|AX_0 - b\|_2 = \min\{\|AX - b\|_2 / X \in \mathbf{R}^3\}$, et déterminer la valeur de ce minimum.
3) X_0 est-il unique ? Déterminer un tel vecteur X_0, puis tous.

F Adjoint

□ **Exercice 56** Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a et b deux vecteurs non nuls de E tels que $(a|b) = 0$.

On définit un endomorphisme de E par :

$$\forall\, x \in E \;,\; u(x) = (a|x)\, b - (b|x)\, a$$

1) Expliciter u^* et calculer $\|u\|_{\text{op}}$.
2) On suppose que : $\|b\| \leqslant \|a\|$. Déterminer un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant les trois conditions :
$$(i)\;\; f^* = -f \quad (ii)\; |f| \leqslant 1 \quad (iii)\;\; f(a) = b$$

□ **Exercice 57** Soit E un espace euclidien. Déterminer l'adjoint d'une symétrie de E. Quelles sont les symétries qui sont des endomorphismes autoadjoint ?

□ **Exercice 58** Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E \quad (u(x)\,|x) = 0$.

1) Montrer que $u^* = -u$; en déduire que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.
2) Montrer que u est de rang pair.

   On pourra s'intéresser à l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$.

□ **Exercice 59**

Soit E un espace euclidien de dimension n, a, b et x sont trois vecteurs de E. trouver une CNS sur a, b et x pour qu'il existe un endomorphisme f de E vérifiant $f(x) = a$ et $f^*(x) = b$.

□ **Exercice 60** Soit E un espace euclidien de dimension n. On pose
$$A = \{f \in \mathscr{L}(E)\ /f \circ f^* \circ f = f\}$$

1) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Comparer $\text{Ker}(f^* \circ f)$ et $\text{Ker}(f)$, puis $\text{Im}(f^* \circ f)$ et $\text{Im}(f^*)$.
2) Montrer que $f \in A$ si et seulement si $f^* \circ f$ est un projecteur orthogonal.
3) Montrer que $f \in A$ si et seulement si $\forall\ x \in (\text{Ker}(f))^\perp$, on a $\|f(x)\| = \|x\|$.
4) Montrer que si f est dans A, alors on a $(\text{Ker}(f))^\perp = \{x \in E/\|f(x)\| = \|x\|\}$.

□ **Exercice 61** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $u : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $u : X \mapsto AX - XA$.

1) Déterminer l'adjoint de u pour le produit scalaire de Schur ($(M, N) \mapsto \text{tr}(M^\top N)$).
2) Soit $C(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})/AM = MA\}$ le commutant de A. Montrer que $\text{Im}(u) = \left(C\left(A^\top\right)\right)^\perp$.

G Isométries vectorielles

□ **Exercice 62** Soient n un entier naturel non nul et $M = (a_{ij}) \in O(n)$.
Démontrer que : $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ |a_{ij}| \leqslant 1$.
Démontrer que : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^2 \leqslant n^4$ (puis n^3 et n^2).

Pour la majoration par n^2, on pourra utiliser le vecteur $w = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ de $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle où $(e_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ est la base canonique.

□ **Exercice 63**

Soit E un espace euclidien, $u \in O(E)$ et $v = u - id$.

1) Montrer que : $\text{Ker}(v) = \Big(\text{Im}(v)\Big)^\perp$.
2) Soit p la projection orthogonale sur $\text{Ker}(v)$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k = p$.

□ **Exercice 64** On donne les deux droites : $(D_1)\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et $(D_2)\ \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Image de (D_1) par la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'axe (D_2).

□ **Exercice 65** Soit $A = \begin{pmatrix} 2a^2-1 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2-1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2-1 \end{pmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, avec $a^2+b^2+c^2=1$.

1) Vérifier que l'endomorphisme u canoniquement associé à A est une isométrie vectorielle.
2) Reconnaitre u, éléments caractéristiques de u.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 66** Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$, $\forall\,(P,Q) \in E^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_3[X]$, déterminer la base obtenue par le procédé de Schmidt appliqué à $(1,X,X^2,X^3)$.
2) Montrer que : si $(P|P)=1$, alors $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$. Egalité ?

CHAPITRE 12

Probabilités II

1 Applications du cours

□ **Exercice 1** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X et soit $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1) Exprimer $\mathbf{P}(M_n \leqslant k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X \leqslant k)$.
2) Supposons que les (X_n) suivent une loi uniforme sur $N_K = \{1, 2, \dots, K\}$ où $K > 1$. Exprimer $\mathbf{E}(M_n)$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(M_n)$.
3) Supposons que les (X_n) suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Exprimer $\mathbf{E}(M_n)$ sous la forme d'une somme.
4) Soit $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Donner la loi de m_n.

□ **Exercice 2** Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Justifier l'existence et calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{2X+1}$

□ **Exercice 3** Le nombre de fleurs portées par un pommier suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque fleur donne un fruit avec la probabilité p.

1) Quelle est la loi conditionnelle du nombre de pommes, sachant que le nombre de fleurs est k ?
2) Déterminer l'espérance du nombre de fruits portés par le pommier.
3) Quelle est la loi du nombre de pommes ?

Cet exercice peut être vu comme un cas particulier des identités de Wald.

□ **Exercice 4** Soit X et Y deux v.a.r indépendantes et de même loi, définie par :

$$\begin{cases} X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X = n) = \mathbf{P}(Y = n) = pq^n, \text{ où } p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1 \end{cases}$$

On pose $Z = \max(X, Y)$. Déterminer la loi de Z et si elle existe son espérance.

□ **Exercice 5** Soit (X,Y) un couple de variable aléatoire discrète réelle à valeurs dans $\mathbf{N}^2$ tel que :

$$\forall (j,k) \in \mathbf{N}^2, \quad \mathbf{P}((X=j)\cap(Y=k)) = \frac{j+k}{e.2^{j+k}j!k!}$$

1) Vérifier que l'on a bien défini ainsi la loi de probabilité de (X,Y).
2) Calculer $\mathbf{E}(2^{X+Y})$

□ **Exercice 6** Soit (X,Y) un couple de variable aléatoire discrète réelle à valeurs dans $\mathbf{N}^2$, tel que :

$$\forall (j,k) \in \mathbf{N}^2, \quad \mathbf{P}((X=j)\cap(Y=k)) = \frac{a}{(j+k+1)!}$$

1) Déterminer a.
2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer la loi de $Z = X+Y$.
4) La variable Z est-elle d'espérance finie ? Si oui calculer $\mathbf{E}(Z)$.
5) Retrouver ce résultat directement sans déterminer la loi de $X+Y$.
6) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.

□ **Exercice 7** Un ascenseur monte et dessert n étages d'un immeuble. Le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur au rez de chaussée est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
On émet les hypothèses suivantes :

- Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez de chaussée.
- Chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard et indépendamment des autres passagers. (Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur).

Enfin, on appelle S la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur.

1) Montrer que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ et pour tout entier naturel k :
$$\mathbf{P}_{(X=k+1)}(S=j) = \frac{j}{n}\mathbf{P}_{(X=k)}(S=j) + \frac{n-j+1}{n}\mathbf{P}_{(X=k)}(S=j-1)$$
2) On note pour tout entier k, $\mathbf{E}_{(X=k)}(S)$ l'espérance de S pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{(X=k)}$.
Montrer que $\mathbf{E}_{(X=k+1)}(S) = 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbf{E}_{(X=k)}(S)$.
3) Après avoir justifié que $\mathbf{E}_{(X=0)}(S) = 0$, déterminer $\mathbf{E}_{(X=k)}(S)$ pour tout entier naturel k.
4) Montrer que si S désigne une variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur alors :
$$\mathbf{E}(S) = n\left(1 - e^{\frac{-\lambda}{n}}\right)$$

□ **Exercice 8** On dispose d'une pièce de monnaie donnant "pile" avec la probabilité p et "face" avec la probabilité $q = 1-p$ (avec $p \in]0,1[$). On lance cette pièce, les lancers étant indépendants les uns des autres, et on note N le nombre aléatoire de lancers nécessaires à la première apparition de "pile" (on pose $N=-1$ si "pile" n'apparaît jamais).

Quand "pile" apparaît au bout de n lancers, on effectue une série de n lancers avec cette même pièce et on note X le nombre de "pile" obtenus au cours de cette série.

1) Quelle est la loi de N ?
2) Déterminer la loi du couple (N,X).

3) Calculer $\mathbf{P}(X=0)$ et $\mathbf{P}(X=1)$.
4) Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\mathbf{P}(X=k)$ sous forme d'une série.
5) Calculer la somme de cette série.
6) Déterminer l'espérance de X.

   On pourra utiliser le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

   Pourquoi ce résultat est-il raisonnable ?

□ **Exercice 9** Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variable aléatoire discrète réelle de Bernoulli de paramètre p indépendantes mutuellement.
Pour $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$

1) Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2) Les variable aléatoire discrète réelle Y_i sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer la matrice des covariances de $(Y_1, \cdots, Y_n)$ et $\mathbf{V}(Y_1 + \cdots + Y_n)$

□ **Exercice 10** Un problème de ruine du joueur :

Soient s, N deux entiers naturels non nuls. Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$. Un individu dispose de s euros (avec $s \in \mathbf{N}^*$) et souhaite acheter un bien qui en coûte N (avec $N \in \mathbf{N}^*$ et $N \geqslant s$). Pour tenter de gagner de l'argent, il propose le jeu suivant à une personne très fortunée : il sort de sa poche une pièce de monnaie (non nécessairement équilibrée) et joue selon la règle suivante :
- si la pièce tombe sur face (ce qui se produit avec la probabilité p), il gagne 1 euro ;
- si la pièce tombe sur pile, il perd 1 euro.

Le jeu s'arrête soit lorsque l'individu est en possession de N euros, soit lorsqu'il est ruiné (si au départ le joueur possède N euros, alors il ne prend même pas part au jeu) ...

Pour tout $k \in \{0, \cdots, N\}$, on note p_k la probabilité de pouvoir acheter le bien avec un avoir initial de k euros. Le nombre N étant fixé, on admet que la variable aléatoire égale à la durée du jeu, lorsque l'individu possède au départ k euros, admet une espérance notée D_k.

1) a) Calculer $p_0,\ p_N$ puis $D_0,\ D_N$.
   b) Montrer que pour tout $k \in \{1, \cdots, N-1\}$, $p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}$.
   c) Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, N\}$,
   $$D_k = p(1 + D_{k+1}) + q(1 + D_{k-1})$$
2) Lorsque $p = q = 1/2$, calculer p_s, c'est-à-dire calculer la probabilité de pouvoir acheter le bien à l'issue du jeu avec un avoir initial de s euros.
3) On suppose dans cette question que $p = q = 1/2$. On cherche à calculer D_s, c'est-à-dire à calculer le temps moyen au bout duquel l'individu pourra acheter le bien ou sera ruiné, avec un avoir initial de s euros.
   a) Montrer que la suite définie pour tout $k \in \mathbf{N}$ par $u_k = -k^2$ satisfait à la relation de récurrence :
   $$\frac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \frac{1}{2}u_{k-1} = -1$$
   b) Montrer que la suite finie $(v_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ définie par $v_k = D_k - u_k$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
   c) En déduire la valeur de D_s.
4) Calculer p_s, lorsque $p \neq q$

□ Exercice 11

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice.

Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) a) Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbf{N}$ telle que les espérances existent, on a :

$$\mathbf{E}[N g(N)] = \lambda \mathbf{E}[g(N+1)]$$

   b) Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{N+1}\right)$.

2) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour toute fonction g telle que les espérances existent,

$$\mathbf{E}\big[Tg(T)\big] = \lambda \mathbf{E}\big[g(T+1)\big]$$

   La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson ?

□ Exercice 12 Soient $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements indépendants.
On note : $p_n = \mathbf{P}(A_n)$, $\bar{p}_n = \frac{p_1+\ldots+p_n}{n}$ et $N_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$ ($\mathbf{1}_{A_k}$ désignant la fonction caractéristique de A_k).

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \bar{p}_n\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(c'est le théorème de Poisson)

□ Exercice 13 Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{\pm 1\}$ telle que $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$ où $p \in [0, 1]$.

On note pour tout entier n, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1) Soit $n \geqslant 1$, calculer $\mathbf{P}(S_{2n} = 0)$.
2) Déterminer deux réels a et b tels que $Z_i = aX_i + b$ suive une loi de Bernoulli pour tout $i \geqslant 1$. On note $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$. Exprimer S_n à l'aide de T_n puis calculer les moments d'ordre 1 et 2 des variables aléatoires T_n et S_n.

□ Exercice 14

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

1) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance finie. On la note $r(Z)$.

On suppose maintenant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(Z = n) = (\frac{1}{2})^{n+1}$.

1) a) Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité et calculer $r(Z)$.

   b) Montrer que pour tout $(n, q) \in \mathbf{N}^2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1}$

   c) Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que Z. Pour tout entier $q \geqslant 1$, on pose $S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i$.

   Montrer que la loi de S_q est définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(S_q = n) = \binom{n+q-1}{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

d) Calculer $r(S_q)$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^q$$

□ **Exercice 15** Moyenne et indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi géométrique sur $\mathbf{N}^*$ de paramètre p, $0 < p < 1$; on note $q = 1 - p$.

On définit les variables aléatoires T, Z et G par :

$T = \min(X, Y)$, $Z = |X - Y|$, $G = \frac{Z}{T}$.

1) Il s'agit d'étudier la loi d'un **minimum** de variables aléatoires.

   a) Calculer, pour tout $x \in \mathbf{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(X \geqslant x)$.
   b) Calculer pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(T \geqslant t)$ et identifier la loi de T.

2) On fait des calculs de moyennes et on on fait l'étude de la loi du couple (T, Z).

   a) Calculer les espérances $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.
   b) Calculer pour $(t, z) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$ la probabilité $\mathbf{P}(T \geqslant t, Z = z)$; étudier séparément le cas $z = 0$.
   c) En déduire la loi de Z.

3) Démontrer alors que les variables aléatoires T et Z sont indépendantes.

   On remarquera que $\mathbf{P}(T \geqslant t, Z \geqslant z)$ s'écrit sous la forme $f(t)g(z)$ où f et g sont des fonctions définies respectivement sur $\mathbf{N}^*$ et $\mathbf{N}$ et qu'il en de même pour $\mathbf{P}(T = t, Z = z)$.

4) Que vaut $\mathbf{E}(G)$?

□ **Exercice 16** Soit $(a, b) \in (]0, 1[)^2$ tel que $a + b < 1$.

Un interrupteur admet deux positions que l'on note 0 et 1.

Si, à l'instant n, il est en position 0, il sera encore en position 0 à l'instant $n + 1$ avec la probabilité $1 - a$ et passera en position 1 avec la probabilité a.

De même, s'il est en position 1, il y restera l'instant suivant avec la probabilité $1 - b$ et basculera en position 0 avec la probabilité b.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit X_n la position de l'interrupteur à l'instant n.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

   $$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$$

   avec $A = \begin{pmatrix} 1 - a & b \\ a & 1 - b \end{pmatrix}$.

2) Si l'on suppose que X_0 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$, déterminer la loi de la variable X_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3) Dans le cas général, montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre p_n.

4) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n = 1)$.

5) Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la covariance entre les variables X_n et X_{n+1}. Quelle est la limite de la suite $\left(\operatorname{Cov}(X_n, X_{n+1})\right)_{n \in \mathbf{N}}$?

□ **Exercice 17**

Une urne contient N jetons numérotées de 1 à N, avec $N \geqslant 3$.

On effectue une succession de tirages, en choisissant à chaque fois au hasard une boule, que l'on replace dans l'urne avant le tirage suivant.

Pour $n \geqslant 2$ et $n \leq N$, on note X_n le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir n numéros distincts. Pour $n \geqslant 3$, on pose $Y_n = X_n - X_{n-1}$.

1) Quelle est la loi de $X_2 - 1$? Déterminer espérance et variance de X_2.
2) Donner une interprétation de Y_n, déterminer sa loi, son espérance et sa variance.
3) Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
4) On suppose N pair et on pose $N = 2m$. Étudier la convergence des suites $\left(\frac{\mathbf{E}(X_m)}{m}\right)_{m\geqslant 2}$ et $\left(\frac{\mathbf{V}(X_m)}{m}\right)_{m\geqslant 2}$.

□ **Exercice 18** Une marque de lessive édite une collection de 4 pin's différents. Une personne achète des barils de cette lessive, afin que son fils puisse collectionner les pin's (un pin's par baril).

On suppose les achats indépendants.

1) Montrer qu'au bout de n achats de barils, la probabilité qu'il manque toujours au moins un pin's à son fils est : $p_n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de barils que la ménagère a achetés lorsque son fils a pour la première fois tous les pin's.
2) Exprimer $\mathbf{P}(X > n)$ à l'aide de la probabilité p_n.
3) En utilisant 1) et 2), déduire que X admet une espérance et la calculer.

2 Exercices plus élaborés

□ **Exercice 19** (Identités de Wald)

On considère une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On suppose que N est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ possédant un moment d'ordre 2 et que les variables aléatoires (X_i), $i \in \mathbf{N}^*$, suivent la même loi que X, où X est une variable aléatoire réelle discrète et possédant un moment d'ordre 2.

On note Y la fonction définie par $Y = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ c'est-à-dire :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

1) Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.
2) Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(Y)$ en fonction de $\mathbf{E}(X)$ et de $\mathbf{E}(N)$. On justifiera que Y est bien d'espérance finie.
3) Déterminer $\mathbf{E}(Y^2)$ en fonction de $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{E}(N^2)$.
4) En déduire $\mathbf{V}(Y)$ en fonction de $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.
5) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n et on dispose d'une pièce de monnaie qui donne le côté pile avec la probabilité p, où $0 < p < 1$. Un joueur tire un jeton dans l'urne et lance ensuite la pièce de monnaie autant de fois que le numéro indiqué par le jeton.

   Calculer la moyenne et la variance de la variable aléatoire comptabilisant le nombre de pile obtenu.

□ **Exercice 20** (Identités de Wald - II)

On considère des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ mutuellement indépendantes $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

On suppose que les variables aléatoires (X_i), $i \in \mathbf{N}^*$, suivent la même loi que X, où X est une variable aléatoire réelle discrète.

On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ c'est-à-dire :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

1) Montrer que $G_Y = G_N \circ G_X$ sur $[-1, 1]$ où G_Y, G_N et G_X sont les fonctions génératrices des variables Y, N et X.
2) Dans le cas où N et X ont des moment finis d'ordre 2, montrer que Y admet un moment fini d'ordre 2 et exprimer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$ en fonction des espérances et variances de X et N.

□ **Exercice 21**

Une urne contient n boules numérotées (non bleues) de 1 à n et k boules bleues non numérotées. Les boules sont tirées avec remise jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée. Au cours de ces tirages, on définit le nombre R de répétitions de la manière suivante :

au début, $R = 0$. Ensuite, on ajoute 1 à R dès que l'on obtient une boule numérotée qui avait été déjà tirée précédemment.

1) Déterminer les probabilités des événements suivants :
   — A_1 = : « la première boule tirée est la boule numéro 1 ».
   — A_2 = : « la première boule tirée est une boule portant un numéro strictement supérieur à 1 »
   — A_3 = « la première boule tirée est une boule bleue »
2) On note A_0 l'événement "la boule numéro 1 n'est jamais tirée lors du jeu". En utilisant la formule des probabilités totales avec les événements précédents, montrer que $\mathbf{P}(A_0) = \frac{k}{k+1}$.
3) On note X le nombre de fois où l'on a tiré la boule 1 au cours du jeu. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question précédente, montrer que $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{k}$.
4) On définit la variable aléatoire Y par :
$$\begin{cases} \text{Si } X \geqslant 1, \text{ alors } Y = X - 1 \\ \text{Si } X = 0, \text{ alors } Y = 0 \end{cases}$$
   (Y est donc le nombre de répétitions de la boule numérotée 1.)

   Montrer que $\mathbf{E}(Y) = \sum_{m \geq 1} (m-1)\mathbf{P}(X = m)$ puis que $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{k(k+1)}$.

Soit r un entier naturel. On recherche la valeur minimale de k (en fonction de n et r) de manière à ce que le nombre moyen t de répétitions soit inférieur ou égal à r.

5) Montrer que $t = n\mathbf{E}(Y)$.
6) En déduire que la valeur minimale recherchée est $k_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{n}{r} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rceil$.

□ **Exercice 22** Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ une suite de variables de Rademacher indépendantes telles que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{P}(\varepsilon_n = +1) = \mathbf{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2.$$

1) Calculer l'espérance $\mathbf{E}\big((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2\big)$ en fonction de n.
2) Soit $a \in]0, 1[$ fixé.

   a) Montrer l'inégalité $\mathbf{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geqslant a.n) \leqslant \frac{1}{a^2 n}$.
   b) Montrer que
   $$\mathbf{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geqslant an) = \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \mathbf{1}_{\{|2\ell-n| \geq a.n\}}$$
   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \mathbf{1}_{\{|2\ell-n| \geqslant an\}} = 0$.

3) Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson, de paramètre $\theta > 0$ telle que $(N, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ sont mutuellement indépendantes. Calculer, en fonction de θ, l'espérance :
$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n\right)^2\right)$$

□ **Exercice 23** Lemmes de Borel-Cantelli :

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$. On note B l'événement $\bigcap\limits_{n\geq 1} \big(\bigcup\limits_{k\geq n} A_k\big)$.

On rappelle que cet événement est en fait :
$$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$

1) On suppose que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbf{P}(A_k)$ converge. Montrer que $\mathbf{P}(B) = 0$.
2) On suppose que les événements (A_n) sont indépendants et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ est divergente.

   a) Montrer que l'événement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup\limits_{n\geq 1} \big(\bigcap\limits_{k\geq n} \overline{A_k}\big)$, où $\overline{M}$ désigne l'événement contraire de l'événement M.
   b) Exprimer $\mathbf{P}\big(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k}\big)$ en fonction des p_k.
   c) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \ln(1 - p_k)$ est divergente.
   d) En déduire que $\mathbf{P}(B) = 1$.

3) Soit α un réel strictement positif et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^\alpha}$.

   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = 0$.
   b) On suppose que $0 < \alpha \leqslant 1$.
   Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n \mid X_n = 1\}$ contient une infinité d'éléments.
   c) On suppose que $\alpha > 1$.
   Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n \mid X_n = 1\}$ est fini.

□ **Exercice 24**

1) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$.

2) a) Dire pourquoi pour tout (x, y) de $[-1, 1]^2$, la famille

$$(\mathbf{P}(X = n \cap Y = m)x^n y^m)_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$$

est sommable. On note $G_{(X,Y)}(x, y)$ sa somme.

b) Montrer que $G_{(X,Y)}(x, y) = \mathbf{E}(x^X y^Y)$.

On suppose désormais que pour tout (x, y) de $[-1, 1]^2$,

$$G_{(X,Y)}(x, y) = \frac{py}{\ln(1-p)} \times \frac{\ln(1 - pxy)}{1 - (1 - p)y}$$

où p est un réel de $]0, 1[$.

3) a) Déterminer $G_X(x)$ pour tout x de $[-1, 1]$.

b) En déduire la loi marginale de X.

4) a) Vérifier que $Y - X$ est presque sûrement à valeurs positives.

b) Montrer que les variables aléatoires X et $Y - X$ vérifient, pour tout (x, y) de $[-1, 1]^2$:
$$G_{(X,Y-X)}(x, y) = G_X(x)G_{Y-X}(y).$$

c) Déterminer la loi de $Y - X$.

□ Exercice 25

1) Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle de variance égale à a.

2) On suppose dans cette question que $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ est la matrice de variance-covariance d'un couple de variables aléatoires discrètes réelles (X, Y). Montrer que $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $ab - c^2 \geqslant 0$.

3) Réciproquement, on suppose que la matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ vérifie $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $ab - c^2 \geqslant 0$.

On suppose que $ab = 0$. Montrer que M est la matrice de variance-covariance d'un vecteur réel (X, Y).

4) On suppose que $ab \neq 0$. On pose

$$\sigma_1 = \sqrt{a},\ \sigma_2 = \sqrt{b},\ \text{ et } \rho = \frac{c}{\sqrt{ab}}$$

Soit (U, V) un couple de variables aléatoires discrètes, avec U et V indépendantes et possédant chacune une variance égale à 1.

Montrer que $(\sigma_1 U, \sigma_2\rho U + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}V)$ a pour matrice de variance-covariance M.

□ Exercice 26

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Soit U une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbf{N}$, admettant un moment d'ordre deux.

1) a) Démontrer la formule : $\mathbf{E}(U) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(U \geqslant j)$.

b) Exprimer de même la somme $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} j\mathbf{P}(U \geqslant j)$ en fonction de $\mathbf{E}(U^2)$ et $\mathbf{E}(U)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendantes, de même loi.

On note pour tout $k \in \mathbf{N}$, $p_k = \mathbf{P}(X_n = k)$ et $F_k = \sum\limits_{j=0}^{k} p_j$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $M_n = \sup\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$.

2) Calculer, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(M_n \leq k)$ en fonction de F_k et n.
3) On suppose dans cette question que les variables X_n suivent la loi uniforme sur $\mathbf{N}_K = \{1, 2, \ldots, K\}$, où K est un entier strictement supérieur à 1.
4) a) Calculer pour tout $k \in \mathbf{N}_K$, la probabilité $\mathbf{P}(M_n = k)$.
   b) On jette trois dés équilibrés ; quelle est la probabilité que le plus grand des chiffres obtenus soit 4 ?
5) On suppose maintenant que les variables X_n suivent la loi géométrique sur $\mathbf{N}^*$ de paramètre p (avec $0 < p < 1$) et on note $q = 1 - p$.

   a) Calculer $\mathbf{E}(M_n)$.
   b) Trois joueurs jouent à Pile ou Face avec une pièce équilibrée et s'arrêtent dès qu'ils ont obtenu un Pile. La variable aléatoire M_3 est alors le nombre de jets effectués par le ou les joueurs ayant obtenu Pile en dernier. Calculer $\mathbf{E}(M_3)$.

□ **Exercice 27**

Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) a) Montrer que $\mathbf{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.
   b) En déduire l'inégalité $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.
2) On considère dans toute cette question une variable aléatoire discrète Z définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, d'espérance nulle et de variance σ^2.

   a) Montrer que
   $$\forall a > 0,\ \forall x \geqslant 0,\ \mathbf{P}(Z \geqslant a) \leqslant \mathbf{P}(\ (Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2\ )$$
   b) Montrer que $\forall a > 0,\ \forall x \geqslant 0,\ \mathbf{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$.
   c) Montrer que $\forall a > 0,\ \mathbf{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$.
   d) En déduire que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda+1}$.
3) Pour tout réel t, on pose $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k$.

   a) Pour tout réel t, justifier l'existence de $G_X(t)$ et calculer sa valeur.
   b) Montrer que : $\forall t \geqslant 1, \forall a > 0,\ \mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}$.
   c) En déduire que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant (\frac{e}{4})^\lambda$.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 28** On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $p \in \mathscr{P}$ et $m \in \mathbf{N}^*$, on note $\delta_p(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } p|m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(m) = \sum_{p\in\mathscr{P}} \delta_p(m)$ le nombre de diviseurs premiers de m.

Pour toute partie A de $\mathbf{N}^*$ on note $\mathbf{P}_n(A) = \frac{1}{n}\text{Card}(A \cap [\![1, n]\!])$. Pour toute application f de $\mathbf{N}^*$ vers $\mathbf{R}$, on note $\mathbf{E}_n(f)$ et $V_n(f)$ l'espérance et la variance de la restriction de f à $[\![1, n]\!]$ muni de la loi uniforme.
On pose $a_n = \mathbf{E}_n(g) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(k)$.

1) Soient $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers distincts. Montrer que $e^{-\sum_{i=1}^{k}\ln(1-\frac{1}{p_i})}$ est la somme des inverses des entiers dont les diviseurs premiers sont parmi $\{p_1, \ldots, p_k\}$.

   En déduire que la famille $\left(\frac{1}{p}\right)_{p\in\mathscr{P}}$ n'est pas sommable.
2) Démontrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.
3) Soient p, q des nombres premiers distincts. Démontrer que
$$\mathbf{E}_n\left(\left(\delta_p - \frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\right).\left(\delta_q - \frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n}{q}\right\rfloor\right)\right) \leqslant \frac{1}{np} + \frac{1}{nq}$$
4) En déduire que $V_n(g) \leqslant 3 \sum_{p\in\mathscr{P},\ p\leqslant n} \frac{1}{p}$.
5) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathbf{P}_n\left(\left|\frac{g}{a_n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
   (c'est le théorème de Hardy-Ramanujan)

□ **Exercice 29** Soient p, q, r trois réels strictement positifs tels que $p + q + r = 1$. On considère, pour tout naturel n, une variable aléatoire $Y_n = (U_n, V_n)$ à valeurs dans $\mathbf{N}^2$ suivant la loi trinomiale :
$$\forall k, \ell \in \mathbf{N} \text{ tels que } k + \ell \leqslant n,\ \mathbf{P}\Big(Y_n = (k, \ell)\Big) = \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!}p^k q^\ell r^{n-k-\ell}$$

On pose $Y_0 = (0, 0)$(variable constante)

1) Démontrer que U_n et V_n suivent des lois binomiales dont on déterminera les paramètres.
2) Les variables U_n et V_n sont-elles indépendantes ?
3) Démontrer que
$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}y^{n-k} = n(x+y)^{n-1}$$
   et en déduire la moyenne de U_nV_n.
4) Calculer la covariance de U_n et V_n et la variance de $U_n + V_n$.
5) Soit N une variable aléatoire à valeurs naturelles. On note $a_n = \mathbf{P}(N = n)$. On suppose que la famille constituée de N et des Y_n est une famille de variables indépendantes.

   On pose
$$\forall \omega \in \Omega, \quad U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega) \qquad V(\omega) = V_{N(\omega)}(\omega)$$
   et on pose $Y = (U, V)$.

   a) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer la loi de Y (on introduira le système complet $\{N = n\}_{n\in\mathbf{N}}$).

      En déduire que U et V sont indépendantes et identifier leur loi.
   b) Dans les mêmes hypothèses, on pose pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$, $G_Y(a, b) = \mathbf{E}(a^U b^V)$ (fonction génératrice de Y).

      Calculer G_Y et en déduire les fonctions génératrices G_U et G_V de U et V. Retrouver les lois de U et V et l'indépendance de ces variables.
   c) On suppose maintenant que N suit une loi quelconque, mais que les variables U et V sont indépendantes. Démontrer à l'aide de la fonction génératrice de Y que N suit une loi de Poisson.

CHAPITRE 13

Espaces vectoriels normés II

1 Applications du cours

A Continuité

□ **Exercice 1** Dans chacun des cas suivants, étudier l'existence de la limite de f en $(0,0)$:

$a)$ $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ $b)$ $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $c)$ $f(x,y) = \frac{x(x-y)}{x^2+y^2}$

$d)$ $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^4+y^2}$ $e)$ $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ $f)$ $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

$g)$ $f(x,y) = \frac{x^{\frac{4}{3}}y}{x^2+xy+y^2}$

□ **Exercice 2** Soit φ une fonction continue sur $\mathbf{R}$. On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f : (x,y) \mapsto \int_x^y \varphi(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.

□ **Exercice 3** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note D le disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon R et f la fonction définie sur D par

$$f : (x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+iy)^n$$

Montrer que f est continue sur D.

B Ouverts, fermés, intérieur, adhérence, frontière

□ **Exercice 4** Montrer que $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ ;\ x^2+3y^2-1 > 0\}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

□ **Exercice 5** Démontrer que si A est un ouvert dense et B une partie dense d'un espace vectoriel normé E, alors $A \cap B$ est dense dans E.
Cela reste t-il vrai si A n'est pas supposé ouvert ?

□ **Exercice 6** Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1];\mathbf{R})$ muni de $\|\ \|_\infty$, $A = \{f \in E; \forall x \in [0,1], f(x) \neq 0\}$.
Déterminer $\overset{\circ}{A}, \overline{A}$.

□ **Exercice 7** Soient $\mathscr{B}$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des suites complexes bornées muni de la norme $\|.\|_\infty$, et A l'ensemble des suites complexes à support fini, c'est-à-dire :

$$A = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbf{N}}; \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n \geq N \Rightarrow u_n = 0)\}$$

Déterminer $\overset{\circ}{A}, \overline{A}, \partial(A)$.

□ **Exercice 8** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.

Pour $x \in E$, comparer $d(x, A)$ et $d(x, \overline{A})$.

□ **Exercice 9** Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, muni de $\| \|_\infty$; soit $A = \left\{f \in E \; ; \; f(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 1\right\}$.

1) Montrer que A est une partie fermée de E.
2) Montrer que pour tout f dans A, $\|f\|_\infty > 1$.
3) Calculer $d(0, A)$.

□ **Exercice 10** Soit E un espace vectoriel normé, F et G deux supplémentaires.
Soit p la projection sur F de direction G. On suppose que p est continue. Montrer que F et G sont fermés dans E.

□ **Exercice 11** Soit E un espace vectoriel normé de dimension n et $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in E^n$. Montrer que $\{x \in E / \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \|x - a_k\| = 1\}$ est un fermé de E.

C Densité

□ **Exercice 12** Soient E et F des espaces vectoriels normés réels. Soit $f : E \longrightarrow F$ vérifiant :

$$\forall\ (x, y) \in E^2 \ , \ \ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que si f est continue en 0_E, alors f est linéaire.

□ **Exercice 13**

1) Soient $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que : $CD = DC$ et $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.
   Montrer que si M est la matrice définie par blocs : $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$,
   alors $\det(M) = \det(AD - BC)$.
2) Montrer que c'est encore vrai si D est non inversible, $\mathbf{K}$ étant $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

□ **Exercice 14** Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, f, g deux endomorphismes de E.

1) On suppose que f est un automorphisme de E ; montrer que : $\chi_{f\circ g} = \chi_{g\circ f}$.
2) On ne suppose plus que f est un automorphisme de E ; montrer que : $\chi_{f\circ g} = \chi_{g\circ f}$.

D Compacité

□ **Exercice 15** Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, muni de $\| \|_\infty$, norme de la convergence uniforme. Soit $\varphi : E \to E$ la fonction définie par

$$\varphi : f \mapsto \exp \circ f$$

Montrer que φ est continue.

□ **Exercice 16** Soit $A = \{x \in \mathbf{R} \; ; \; \frac{x^2+1}{x}(\sin x).(\operatorname{ch} x) \leqslant 1\}$. La partie A est-elle compact ?

□ **Exercice 17** Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel.
On note $A+B$ l'ensemble $\{a+b\ ;\ (a,b)\in A\times B\}$.

1) Soit K un compact et F un fermé. Montrer que $K+F$ est fermé.
2) Déterminer deux fermés F, F' tels que la somme $F+F'$ n'est pas fermée.

   On pourra considérer $F=\{-n\ ,\ n\geqslant 3\}$ et $F'=\{\ell+\frac{1}{\ell}\ ,\ \ell\in\mathbf{N}^*\}$.
3) Soit K et L deux compacts. Montrer que $K+L$ est compact.
4) Soit K et L deux compacts. Montrer que la réunion des segments joignant un point de K et un point de L est compact.

□ **Exercice 18** Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction continue. Montrer que l'image réciproque de tout compact est compact si et seulement si $\lim\limits_{\pm\infty}|f|=+\infty$.

E Espaces vectoriels et algèbres de dimension finie

□ **Exercice 19** Soit $f:\mathscr{M}_n(\mathbf{C})\to\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définie par $f:M\mapsto M^2$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
2) Soit B une partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que f est lipschitzienne sur B.

□ **Exercice 20** Soient E,F des espaces vectoriels normées, K une partie compacte de E, L une partie de F et $f:K\to L$ continue et bijective. Montrer que f^{-1} est continue.

□ **Exercice 21** Soit $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, non borné si $n\geqslant 2$.

□ **Exercice 22** Montrer que $O(n)=\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\ ;\ M^\top M=I_n\}$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

F Séries de matrices, exponentielles

□ **Exercice 23** Soit $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

La matrice $I-A$ est-elle inversible ? Calculer son inverse en utilisant la somme d'une série.

□ **Exercice 24**

Soit $A=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&b\\b&\cdots&b&a\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ où a,b sont des réels. Calculer $\exp(A)$.

□ **Exercice 25** Calculer $\exp(A)$ dans les exemples suivants :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&1\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}\quad,\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&2&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&n-1\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

□ **Exercice 26** Pour chacune des matrices M suivantes :

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp(tM)$ pour t réel.

□ **Exercice 27** Soit M une matrice carrée telle que $M^2 = -M$.

1) Justifier que les séries $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{M^{2k}}{(2k)!}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{M^{2k+1}}{(2k+1)!}$ convergent.
2) Que dire de $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{M^{2k}}{(2k)!} - \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{M^{2k+1}}{(2k+1)!}$

□ **Exercice 28** Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

□ **Exercice 29** Soient a, b, c trois réels non tous nuls et $M = \begin{pmatrix} b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & c-a-b & 2c \\ 2a & 2a & a-b-c \end{pmatrix}$.

1) Calculer M^n pour $n \in \mathbf{N}$ ainsi que $\exp(M)$.
2) Déterminer une condition nécéssaire et suffisante pour que M soit inversible, calculer alors M^{-1}

□ **Exercice 30** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) Trouver V_1, V_2, V_3 tels que :

$$AV_1 = -V_1; \quad AV_2 = V_1 - V_2; \quad AV_3 = V_2 - V_3$$

2) Calculer A^3
3) Calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbf{R}$.

G Continuité uniforme

□ **Exercice 31**

1) Montrer que $x \longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
2) Même question avec $x \longmapsto \sin(x^2)$.
3) Montrer que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

2 Exercices plus élaborés

A Ouverts, fermés, intérieur, adhérence, frontière

□ **Exercice 32** Soit $k \in \mathbf{R}^+$. Pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, on pose

$$\Omega_n = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; ; \; \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{k^2}{n^2}\right\}$$

Soit $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \Omega_n$. Déterminer une CNS sur k pour que Ω soit une partie fermée de $\mathbf{R}^2$.

□ **Exercice 33** Démontrer que si A est un ouvert et B une partie quelconque d'un espace vectoriel normé, alors $A+B$ est un ouvert (où $A+B=\{a+b,\ (a,b)\in A\times B\}$)

□ **Exercice 34** Soit A et B deux fermés disjoints d'un espace vectoriel normé E. Montrer qu'il existe U et V des ouverts disjoints de E tels que $A\subset U$ et $B\subset V$.

On pourra utiliser les fonctions $x\mapsto d(x,A)$ et $y\mapsto d(y,B)$.

B Densité

□ **Exercice 35** Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E. Prouver que

1) si $F\neq E$ alors F est d'intérieur vide.
2) $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3) Si F est un hyperplan de E, il est soit fermé, soit dense dans E.

□ **Exercice 36**

1) Soit G soit sous-groupe de $(\mathbf{R},+)$. Montrer qu'il est dense ou qu'il existe $a\in\mathbf{R}_+$ tel que $G=a\mathbf{Z}$.
2) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continue. On suppose qu'il existe $T_1>0$ et $T_2>0$ telles que f soit T_1-périodique et T_2-périodique. Dans le cas où $\frac{T_1}{T_2}\notin\mathbf{Q}$ montrer que f est constante.

□ **Exercice 37** Soit une suite (a_n) telle que $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ a_n\in\{0,1\}$. Soit $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n+k}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

1) Que devient (A_n) si (a_n) est constante ? stationnaire ?

   Que se passe-t-il si on modifie un nombre fini de a_n ?
2) Montrer qu'il existe (a_n) telle que (A_n) diverge.

On note I le plus petit intervalle contenant tous les termes de la suite (A_n).

3) Soit ℓ un point intérieur de I ; montrer qu'il existe $n_0\in\mathbf{N}^*$, $n_0\geqslant\ell^{-\frac{1}{2}}$, $(a1,\cdots,a_{n_0})$ tels que $\ell\leqslant A_{n_0}\leqslant\ell+\frac{1}{2n_0}$.

   Peut-on dire que : $\ell\leqslant A_{n_0+1}\leqslant\ell+\frac{1}{2(n_0+1)}$?

□ **Exercice 38** Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles croissantes et non bornées, telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}-a_n=0$.
Montrer que $\{a_n-b_m\ ;\ (n,m)\in\mathbf{N}^2\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

C Compacité

□ **Exercice 39** On pose $K_0=[0,1]$, $K_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$ et pour tout entier n,

$$K_{n+1}=\{x\in[0,1]\ ,\ 3x\in K_n \text{ ou } 3(1-x)\in K_n\}.$$

On pose alors $K=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}K_n$.

1) Expliciter K_2 et K_3 comme réunion d'intervalles puis K_n.
2) Montrer que K est un compact d'intérieur vide.
3) Montrer que tout élément de K peut s'écrire sous la forme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\frac{1}{3^n}$ avec a_n dans $\{0,2\}$.

□ **Exercice 40** Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$ et f et g deux fonctions lipschitziennes de K dans $\mathbf{R}$. Montrer que fg est lipschitzienne.

Donner un contre-exemple dans le cas où K n'est pas compact.

□ **Exercice 41** Soit K un compact non vide de E, espace vectoriel normé, et soit f une application de K dans K telle que :

$$\forall\,(x,y)\in K\times K\ ,\ x\neq y\Longrightarrow\|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|$$

Démontrer que f possède un unique point fixe.

On pourra utiliser pour l'existence l'application $x\longmapsto\|f(x)-x\|$.

□ **Exercice 42** Théorème de Carathéodory

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé. On note $\|.\|$ sa norme. On considère une partie H de E.

On dit que $x\in E$ est une combinaison convexe des p éléments $x_1,\ldots,x_p\in E$ s'il existe des réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\qquad\text{et}\qquad\sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1.$$

1) Montrer que l'ensemble Conv(H) des combinaisons convexes d'éléments de H est convexe et qu'il est inclus dans toute partie convexe de E qui contient H.

On appellera dans la suite *enveloppe convexe* de H cette partie de E.

2) On suppose dans cette question que E est de dimension finie et on note $n=\dim E$. On souhaite montrer que Conv(H) est l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H. On considère $x=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1,\ldots,x_p\in H$ où $p\geqslant n+2$.
   a) En considérant la famille $(x_2-x_1,x_3-x_1,\ldots,x_p-x_1)$, montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1,\ldots,\mu_p$ tels que
   $$\sum_{i=1}^{p}\mu_i x_i=0\qquad\text{et}\qquad\sum_{i=1}^{p}\mu_i=0.$$
   b) En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que Conv(H) est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H. On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i-\theta\mu_i\geqslant 0$, $i\in\{1,2,\ldots,p\}$ pour un réel θ bien choisi.
3) a) Montrer que l'ensemble
   $$\Delta=\left\{(t_1,\ldots,t_{n+1})\in\mathbf{R}_+^{n+1}\ ,\ \sum_{i=1}^{n+1}t_i=1\right\}$$
   est une partie compacte de $\mathbf{R}^{n+1}$.
   b) En déduire que si E est de dimension finie et si H est compact alors Conv(H) est encore compact.

□ **Exercice 43** Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F une partie fermée non vide de E et $x\in E$. Montrer qu'il existe $x_0\in F$ tel que $d(x,F)=\|x-x_0\|$.

Donner un exemple où ce résultat n'est plus vrai dans le cas où E n'est plus de dimension finie.

□ **Exercice 44** Soit (u_n) une suite bornée de vecteurs d'un espace de dimension finie. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est compact.

D Espaces vectoriels et algèbres de dimension finie

□ **Exercice 45** Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

□ **Exercice 46** Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ n'est pas dense dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

□ **Exercice 47**

1) Montrer que : $\forall\, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\det(AB + I_n) = \det(BA + I_n)$.
2) Montrer que : $\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\det(A\bar{A} + I_n) \in \mathbf{R}$

□ **Exercice 48** Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1) Montrer que l'ensemble des projecteurs de est une partie fermée de $\mathscr{L}(E)$.
2) Est-ce une partie compacte ?
3) Que dire de l'ensemble des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien ?

□ **Exercice 49**

1) Montrer que $M \mapsto \chi_M$ est une application continue de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}[X]$.
2) Montrer que $M \mapsto \mu_M$ n'est pas continue où μ_M désigne le polynôme minimal de la matrice M.

E Continuité uniforme

□ **Exercice 50** Soit une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, et uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

On suppose que : pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))$ converge. Que dire de f ?

On pourra commencer par montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx)$ *est la même pour tous les rationnels* x

□ **Exercice 51** Soit $f : I \subset \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$, f uniformément continue sur I. Soit a une extrémité finie de l'intervalle I qui ne soit pas dans I . Montrer qu'on peut prolonger f par continuité au point a.

On obtient ainsi une application $\hat{f} : I \cup \{a\} \longmapsto \mathbf{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est uniformément continue.

□ **Exercice 52** Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ uniformément continue sur $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$ tels que : $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| \leqslant \alpha\,|x| + \beta$.

□ **Exercice 53** Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue et ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

F Séries de matrices, exponentielle

□ **Exercice 54** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$, $(p, q, r) \in \mathbf{R}^3$. Calculer $\exp(tA)$ pour t réel.

□ **Exercice 55** Soit $\lambda \neq 0$ et $n \in \mathbf{N}$. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\exp(B) = \lambda I_n + N$.

On pourra poser $P = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$ *et* $Q = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k}$ *et montrer que* $P \circ Q - (1 + X)$ *est divisible par* X^n *en raisonnant à l'aide de développements limités.*

G Connexité par arcs

□ **Exercice 56**

1) Le groupe $O(3)$ est-il connexe par arcs ?
2) Montrer que $SO(3)$ est connexe par arcs.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 57** Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$, F un sous-espace vectoriel de E tel qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall f \in F, \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant c\left(\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Montrer que F est de dimension finie, et que $\dim(F) \leqslant c^2$.

On pourra considérer, pour une famille orthonormale finie $(f_1, \ldots, f_n)$ de vecteurs de F et pour un réel s fixé, la fonction $t \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(s)f_i(t)$.

□ **Exercice 58**

1) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est-il connexe par arcs ?
2) a) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer que M peut s'écrire comme un produit de matrices de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ $(i \neq j)$ ou $I_n + \alpha E_{i,i}$ $(\alpha \neq -1)$.
   b) En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R}) = \{M \in GL_n(\mathbf{R}) / \det(M) > 0\}$ est connexe par arcs.
3) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est-il connexe par arcs ?

□ **Exercice 59** Soit E un espace euclidien, et u une isométrie vectorielle de E. Soit x un vecteur quelconque de E.

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E par :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ \forall n \in \mathbf{N}\,,\ x_{n+1} = u(x_n) \end{cases}$$

Montrer que x est valeur d'adhérence de la suite (x_n)

□ **Exercice 60** Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$; pour tout φ de E, on définit N_φ sur E par :

$$\forall\, f \in E \quad , \quad N_\varphi(f) = \int_0^1 |\varphi(t)f(t)| \,\mathrm{d}t$$

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que N_φ soit une norme sur E.
2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que N_φ et N_1 (norme de la convergence en moyenne sur E) soient équivalentes.
3) Soient $(\varphi, \psi) \in E^2$; déterminer une condition nécessaire et suffisante sur φ et ψ pour que N_φ et N_ψ soient équivalentes.

CHAPITRE 14

Espaces préhilbertiens II

1 Applications du cours

A Endomorphismes symétriques, matrices symétriques réelles

□ **Exercice 1** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\exists a \in \mathbf{R}^*$ vérifiant : $M^\top = M^{-1} + aI_n$.

1) Montrer que M est diagonalisable.
2) Déterminer un polynôme annulateur de M.

□ **Exercice 2** Soit S une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans $\mathbf{R}^n$ et $(U_1, \ldots, U_n)$ dans $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}))^n$ tels que

$$\forall k, \ell \in [\![1, n]\!] \quad U_k^\top U_\ell = \delta_{kl} \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_k U_k^\top .$$

□ **Exercice 3** Soit $S = (s_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de S ; montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

□ **Exercice 4** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $S = \frac{1}{2}(A + A^\top)$, α (respectivement β) la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de S ; soit λ une valeur propre réelle de A. Montrer que $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$. On pourra considérer $X^\top SX$ pour $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbf{R})$.

Application : Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, A antisymétrique, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(A) \subset \{0\}$.

□ **Exercice 5** Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de S (non nécessairement distinctes) ; montrer que :

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| = \sup_{X \in \mathbf{R}^n,\ \|X\|=1} \|SX\|$$

où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^n$.

□ **Exercice 6** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$; montrer que si A est symétrique, alors $A = 0$.

□ **Exercice 7** Soit a un réel, et $f(: (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+2axy+y^2}{x^2+y^2}$. Déterminer $\sup\limits_{(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}} f(x,y)$

□ **Exercice 8** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $AA^\top A = I_n$.

1) Montrer que A est inversible.
2) Montrer que A^{-1} est symétrique, de même que A.
3) Déterminer A, déterminer toutes les solutions de l'équation.

□ **Exercice 9** Soit E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux.
Montrer que l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est diagonalisable, et que son spectre est inclus dans $[0,1]$.

□ **Exercice 10** On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable, et la diagonaliser par le groupe orthogonal $O(5)$.

□ **Exercice 11** Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$. Pour P, Q dans E on pose

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

On considère aussi $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi : P \mapsto (2X-1)P' + X(X-1)P''$.

1) Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire et que φ est un endomorphisme de E.
2) Montrer que φ est diagonalisable.
3) Soient λ, μ deux valeurs propres distinctes de φ, et $P, Q \in E$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$ et $\varphi(Q) = \mu Q$ Montrer que $(P|Q) = 0$.

□ **Exercice 12** Soient A et B deux matrices colonnes réelles à n lignes linéairement indépendantes..
On pose $M = AB^\top + BA^\top$

1) Montrer que M est diagonalisable.
2) Montrer que si $n > 2$, 0 est valeur propre de M, et que l'espace propre associé est l'orthogonal de Vect (A, B)
3) Déterminer les autres valeurs propres et les espaces propres associés.
4) Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que M^p est combinaison linéaire de M et M^2.

□ **Exercice 13** Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire naturel :

$$\forall\ (X,Y) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2\ \ ,\ \ (X|Y) = \mathrm{tr}(X\top Y)$$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que (A, B) soit libre.

On définit $f : E \to E$ par $f : M \mapsto (A|M)B + (B|M)A$.

1) La fonction f appartient-elle à $\mathrm{GL}(E)$?
2) La fonction f est-elle diagonalisable ?

   Déterminer ses éléments propres.

□ **Exercice 14** Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

Soient (u, v) une famille libre de E, soit f l'application de E dans E définie par :

$$f\ : x \longmapsto (u|x)v - (v|x)u$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la représentation matricielle de f admet $n-2$ colonnes nulles.
3) Déterminer les éléments propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4) Déterminer l'adjoint de f.

□ **Exercice 15** Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ muni du produit scalaire :

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2 \quad , \quad (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto 2XP' + (X^2-1)P''$ est un endomorphisme autoadjoint de E.

□ **Exercice 16** Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 17** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1) Déterminer le rang et le noyau de M.
2) Déterminer les éléments propres de M.
3) Etudier la diagonalisabilité de M.
4) Déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

□ **Exercice 18** Soit u un endomorphisme symétrique d'une espace vectoriel euclidien E vérifiant :

$$\forall x \in E \quad , \quad (x|u(x)) = 0$$

Montrer que u est l'endomorphisme nul.

□ **Exercice 19** Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$. Pour $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E.
2) Montrer que : $\varphi\ :\ P \longrightarrow (X^2-1)P'' + (2X+1)P'$ est un endomorphisme autoadjoint de E.
3) Valeur propres et diagonalisabilité de φ.

2 Exercices plus élaborés

A Endomorphismes autoadjoint, matrices symétriques réelles

□ **Exercice 20** Soit A appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et antisymétrique. Montrer que $A + I_n$ est inversible.

□ **Exercice 21** On pose $E = \mathbf{R}_n[X]$. Il est muni du produit scalaire : $(A|B) = \displaystyle\int_0^1 A(t)\,B(t)\ \mathrm{d}t$

Soit u l'application qui à $P \in E$ associe le polynôme $Q = u(P)$ défini par :
$\forall x \in \mathbf{R} \quad Q(x) = \displaystyle\int_0^1 (x+t)^n P(t)\ \mathrm{d}t$

1) Montrer que u est symétrique et bijectif.

2) Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u et $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

   Montrer que : $\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad (x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P_k\,(x)\, P_k\,(y)$

   Déterminer $\operatorname{tr}(u)$

3) Calculer $\operatorname{tr}(u^2)$.

□ **Exercice 22** Soit A une matrice de $S_p(\mathbf{R})$, inversible.
On définit la suite A_n par : $A_0 = A$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A_{n+1} = \frac{1}{2}(A_n + A_n^{-1})$$

Montrer que la suite (A_n) est bien définie, et déterminer sa limite

□ **Exercice 23** Soit $n \in \mathbf{N}^*$, (A_k) une suite de $S_n(\mathbf{R})$

1) Montrer que : $\forall k \in \mathbf{N}$, $I_n + A_k^2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
2) On note, pour $k \in \mathbf{N}$, $B_k = (I_n + A_k^2)^{-1} A_k$. On suppose que la suite (B_k) converge vers 0 et que la suite (A_k) est bornée. Montrer que (A_k) converge vers 0.

B Endomorphismes symétriques positifs, matrices symétriques réelles positives

□ **Exercice 24** Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.

1) Montrer que $M^\top M \in S_p^+(\mathbf{R})$.
2) Justifier que $M^\top M \in S_p^{++}(\mathbf{R})$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(M) = \{0\}$. Dans l'affirmative, en déduire une inégalité entre n et p.

□ **Exercice 25** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a, b et d la matrice A appartient-elle à $S_2^+(\mathbf{R})$? à $S_2^{++}(\mathbf{R})$?

□ **Exercice 26** Soit E un espace euclidien, u et v des endomorphismes de E, On suppose que u est symétrique défini positif.

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme w de E tel que : $u \circ w + w \circ u = v$.

On pourra au choix, considérer l'endomorphisme f de $\mathscr{L}(E)$ défini par $f : u \mapsto u \circ w + w \circ u$ ou travailler matriciellement.

□ **Exercice 27** Soit E un espace euclidien de dimension n et u un vecteur de E, on définit f_u par : $\forall\, x \in E \;,\; f_u(x) = (u|x)u$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $f \in S^+(E)$ si et seulement si il existe une famille $(u_1, \cdots, u_n)$ de E telle que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{u_i}$.

□ **Exercice 28**

1) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = P^\top P$.
2) Soient $A, B \in S_n^+(\mathbf{R})$. On suppose que : $\forall X \in \mathbf{R}^n \quad , \quad X^\top A X \leqslant X^\top B X$.

   Montrer que $\det(A) \leqslant \det(B)$.

□ **Exercice 29** Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ on pose $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$ et $\|A\| = \sqrt{(A|A)}$ (produit scalaire et norme de Schur). On se propose de montrer que la norme de Schur est sous-multiplicative, c'est-à-dire vérifie $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|$.

1) Montrer que $\|AB\|^2 = \mathrm{tr}(A^\top ABB^\top)$
2) Que dire des matrices $A^\top A$ et $BB^\top$?
3) Première méthode : Commencer par traiter le cas où $A^\top A$ est diagonale, puis s'y ramener.
4) Seconde méthode : interpréter $\mathrm{tr}(A^\top ABB^\top)$ comme un produit scalaire, le majorer, et comparer $\|A^\top A\|$ à $\|A\|^2$ (et $\|BB^\top\|$ à $\|B\|^2$).

□ **Exercice 30** Soit E un espace euclidien, $u \in S^{++}(E)$.

1) On pose $S = \{x \in E\ ;\ \|x\| = 1\}$. Déterminer : $\min\limits_{x \in S} (u(x)|x)(u^{-1}(x)|x)$.
2) En quels vecteurs de S ce minimum est-il atteint ?

□ **Exercice 31** Soit n un entier naturel non nul. Soit $S \in S_n^+(\mathbf{R})$ et $\Omega \in O(n)$.
Démontrer que : $|\mathrm{tr}(S\Omega)| \leqslant \mathrm{tr}(S)$.

□ **Exercice 32** Soient A et B dans $S_n^+(\mathbf{R})$. On dit que A et B sont congruentes si et seulement s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = P^\top BP$.

Montrer que A et B sont congruentes si et seulement si elles ont même rang.

□ **Exercice 33** (Matrice de Hilbert I)

Soit $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbf{R}^+)$ $(a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$ non nulle. Démontrer que la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de terme général $\displaystyle\int_a^b t^{i+j} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Application : prouver que $\left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n-1, 0 \leqslant j \leqslant n-1}$ est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

□ **Exercice 34** (Matrice de Hilbert II) Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$de coefficients d'indice (i, j) valant $\frac{1}{i+j-1}$.

1) Montrer que $H \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.
2) Montrer que si $P \in \mathbf{R}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^1 P(x)\,\mathrm{d}x = -i \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
3) En déduire que si $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$: $\sum\limits_{k=1}^n \sum\limits_{j=1}^n \frac{x_k x_j}{j+k-1} \leqslant \pi \sum\limits_{k=1}^n x_k^2$.
4) Montrer que la plus grande valeur propre de H est inférieur ou égale à π.

□ **Exercice 35** (Racine carrée dans $S_n^+(\mathbf{R})$).

Montrer que pour tout $S \in S_n^+(\mathbf{R})$, il existe une unique matrice $R \in S_n^+(\mathbf{R})$ telle que $S = R^2$.

□ **Exercice 36** (Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$)

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

On cherche à écrire A sous la forme $A = US$ où $(U, S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$.

1) Montrer qu'il existe une unique décomposition. On procédera par analyse-synthèse en utilisant l'exercice précédent.
2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer la décomposition polaire de A.

□ **Exercice 37** (Décomposition polaire dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

On cherche à écrire A sous la forme $A = US$ où $(U, S) \in O(n) \times S_n^+(\mathbf{R})$.

1) Montrer que $O(n)$ est un compact.
2) Montrer que $S_n^+(\mathbf{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$
3) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$
4) En déduire qu'il existe $(U,S) \in O(n) \times S_n^+(\mathbf{R})$ tels que $A = US$

□ **Exercice 38** (Décomposition polaire dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ - bis)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Soit r son rang.

1) Montrer qu'il existe des matrices orthogonales $P,Q \in O(n,\mathbf{R})$ et une matrice inversible $B \in \mathrm{GL}(r,\mathbf{R})$ telles que $A = QA'P^{-1}$ avec $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2) Soit $(V,\Sigma) \in O(r,\mathbf{R}) \times S_r^{++}$ tels que $B = V\Sigma$.

   Déterminer les éléments $U' = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \in O(n,\mathbf{R})$ tels que $A' = U'\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) En déduire tous les couples $(U,S) \in O(n,\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^+$ tels que $A = US$.

□ **Exercice 39** (Décomposition de Choleski)

1) Montrer que l'ensemble $\mathscr{T}_n^{++}$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, triangulaires supérieures, à éléments diagonaux strictement positifs, est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
2) Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, symétrique définie positive.
   a) Montrer que $(X,Y) \mapsto X^\top SY$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
   b) Montrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathscr{T}_n^{++}$ telle que $S = T^\top T$

      On pourra orthonormaliser la base canonique pour ce produit scalaire
3) Comment se généralise le résultat précédent lorsque S est simplement symétrique positive ?
4) **Application** : soit $S = (s_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, symétrique positive ; établir :

$$\det S \leq \prod_{k=1}^{n} s_{k,k} \ .$$

   En déduire, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$: $\det A \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}$.

□ **Exercice 40** Soit E un $\mathbf{R}$–espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$, soit u un endomorphisme symétrique de E.

1) Si p est un entier naturel impair, montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique v de E tel que $v^p = u$.
2) Si p est un entier naturel pair, a-t-on le même résultat ? conclure.

   Qu'en est-il si $u \in S^+(E)$? si $u,v \in S^+(E)$?

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 41** Soit $A,B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$. On veut montrer que $\det(A) + \det(B) \leqslant \det(A+B)$.

1) Démontrer la propriété quand $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

   On pourra utiliser la racine carrée de A dans $\mathscr{S}_n^{++}$.
2) En déduire le résultat annoncé.

3) Reprendre la question 1) de l'exercice en vérifiant que $M \mapsto A^{-1}BM$ est un endomorphisme autoadjoint de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ muni t'un produit scalaire judicieux.

□ **Exercice 42** Soit S une matrice réelle symétrique positive, et T une matrice réelle antisymétrique.

1) Montrer que les valeurs propres de T sont imaginaires pures.
2) Montrer que $\det(S) \leqslant \det(S+T)$.

□ **Exercice 43** Soient f et g deux endomorphismes symétriques et positifs, tels que $f \circ g = g \circ f$.

1) Montrer que $f + g$ et $f \circ g$ sont symétriques et positifs.
2) Comparer $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(f+g)$.
3) Comparer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Ker}(f+g)$.

□ **Exercice 44** Soient $B \in S_n(\mathbf{R})$ et une suite (A_p) d'éléments de $S_n(\mathbf{R})$. On écrit pour X et Y dans $S_n(\mathbf{R})$, $X \leqslant Y$ si et seulement si $Y - X$ est positive.
Démontrer que $\forall p \in \mathbf{N} \quad A_p \leqslant A_{p+1} \leqslant B$ implique que la suite (A_p) converge dans $S_n(\mathbf{R})$ et que $\lim\limits_{p \to +\infty} A_p \leqslant B$.

□ **Exercice 45** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive.

1) Montrer que l'on a : $\det(A)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)$.
2) Montrer que $\det(A) \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$.

CHAPITRE 15

Dérivation

A Autour du théorème de Rolle et des accroissements finis

□ **Exercice 1** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, ayant une limite finie en $+\infty$. La fonction f' admet-elle une limite en $+\infty$?

□ **Exercice 2** Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, scindé sur $\mathbf{R}$. Montrer que P' est également scindé sur $\mathbf{R}$.

Montrer que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n = \left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$ admet n racines réelles distinctes dans $]-1,1[$.

□ **Exercice 3** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction n fois dérivable sur $[a,b]$ et s'annulant en $n+1$ points distincts de $[a,b]$ $(n \in \mathbf{N},\ (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ a < b)$.
Démontrer qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

□ **Exercice 4** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$ $((a,b) \in \mathbf{R}^2,\ a < b)$.
Démontrer qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = f(c)$.

On pourra utiliser la fonction auxiliaire $\varphi : x \longmapsto e^{-x} f(x)$.

□ **Exercice 5** Montrer que : $\forall \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ \left|\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - 1\right| \leqslant \lambda\sqrt{2}$.

□ **Exercice 6** Démontrer les inégalités suivantes

1) $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ |\sin b - \sin a| \leqslant |b-a|$.
2) $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ |\cos b - \cos a| \leqslant |b-a|$.
3) $\forall x \in \mathbf{R},\ e^x \geqslant 1 + x$.
4) $\forall x \in \mathbf{R}^{+*},\ \ln(1+x) < x$.
5) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \tan x \geqslant x$.

□ **Exercice 7** Déterminer le plus petit $K > 0$ tel que :

$$\forall\, x > 0 \ ,\ \left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right| \leqslant K\, x^3$$

□ **Exercice 8** Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \leqslant a \leqslant b$.
Démontrer que : $\dfrac{b-a}{1+b^2} \leqslant \arctan\ b - \arctan\ a \leqslant \dfrac{b-a}{1+a^2}$.

□ **Exercice 9** Soient $a \in]0,+\infty[$, et $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$, $f'(c) = 0$.

□ **Exercice 10** On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$.

1) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que f est n fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe une fonction polynôme p_n de degré n telle que :
   $\forall x \in \mathbf{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{p_n(x)}{(1+x^2)^n}$.
2) Démontrer que p_n admet n racines réelles distinctes.

□ **Exercice 11** Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ $((a,b) \in \mathbf{R}^2,\ a < b)$
et d un réel n'appartenant pas à $[a,b]$.
Démontrer qu'il existe un point C de la courbe représentative de f où la tangente passe par le point D de coordonnées $(d,0)$.
On pourra utiliser la fonction auxiliaire $\varphi : x \longmapsto \frac{f(x)}{x-d}$.

□ **Exercice 12** (Majoration de l'erreur dans une interpolation linéaire)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur $[a,b]$ et admettant une dérivée seconde sur $]a,b[$.

L'interpolation linéaire de f sur $[a,b]$ est l'unique fonction affine ℓ telle que $\ell(a) = f(a)$ et $\ell(b) = f(b)$, c'est à dire :

$$\ell : x \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

On pose $\varepsilon : [a,b] \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varepsilon : x \mapsto f(x) - \ell(x)$$

1) Montrer que : $\forall\, x \in]a,b[$, $\exists\, c_x \in]a,b[$,

$$f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right) = \frac{1}{2}\,(x-a)(x-b)\,f''(c_x)$$

2) On suppose ici que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$.

   Justifier l'existence de $M_2(f) = \sup\limits_{u\,\in\,[a,b]} |f''(u)|$.

   Montrer que :

$$\forall\, x \in [a,b]\ ,\ \left|f(x) - \left(\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)\right| \leqslant \tfrac{(b-a)^2}{8}\, M_2(f)$$

□ **Exercice 13** Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et $f : [a_1, a_n] \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $[a_1, a_n]$, admettant une dérivée $n^{ième}$ sur $]a_1, a_n[$ et s'annulant en $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Montrer que :

$$\forall\, x \in [a_1, a_n]\ ,\ \exists\, \xi \in]a_1, a_n[\ ,\ f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{n\,!}\, f^{(n)}(\xi)$$

□ **Exercice 14** Soit $f : [0,2] \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.

1) Montrer que :

$$\forall\, x \in [0,2] \ , \ \exists\, \xi \in]0,2[\ , \ f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6} f^{(3)}(\xi)$$

On pourra montrer que pour tout réel x dans $[0,2]$, il existe un réel A_x tel que f et la fonction $g : t \mapsto t(t-1)(t-2)A_x$ coïncident en x.

2) Montrer que : $\displaystyle\int_0^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{12} \sup_{u\in[0,2]} |f^{(3)}(u)|$.

3) Déduire de la question a) sur :

$$\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{24}\left(\sup_{u\in[0,2]} f^{(3)}(u) - \inf_{u\in[0,2]} f^{(3)}(u)\right)$$

Que dire des cas d'égalité ?

B Étude de suites, définition de la dérivabilité d'une application

□ **Exercice 15** Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable en 0 , avec $f(0) = 0$.

Déterminer la limite de la suite $\quad u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

□ **Exercice 16** Déterminer les limites des suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k}} \quad , \quad v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \quad , \quad w_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)$$

C Dérivations successives

□ **Exercice 17** Déterminer , pour $n \in \mathbf{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x^2(1+x)^n, \qquad g : x \mapsto e^x\cos(x), \qquad h : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$$

□ **Exercice 18** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une fonction polynomiale de degré n telle que

$$f^{(n)} : x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

□ **Exercice 19** Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe une application $g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall\, x \in [0,+\infty[\ , \ f(x) = g(x^2)$$

□ **Exercice 20** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ une application n fois dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
On pose $f_n : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ définie par $f_n : x \mapsto x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que : $\quad \forall\, x \in \mathbf{R}^* \ , \ f_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$

D Accroissements finis, inégalité des accroissements finis, formules de Taylor

□ **Exercice 21**

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$
2) En déduire pour $k \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$ fixé , la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum\limits_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.
3) Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable en 0, avec $f(0) = 0$. Déterminer la limite de la suite $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

□ **Exercice 22** Soit $\alpha \in]0,1[$.

1) Montrer que $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$
2) En déduire un équivalent de $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}}$ quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 23** Montrer que $x \longmapsto e^x$ est 1 lipschitzienne sur $]-\infty, 0]$.

□ **Exercice 24** Montrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbf{R}^+$, $\quad \dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$
2) $\forall x \in]0,1[$, $\quad x \leq \arcsin x \leq \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Etablir qu'en fait ces inégalités sont strictes.

□ **Exercice 25** Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes, telle que f, f' et f'' soient bornées sur $\mathbf{R}$. On note $\| \ \|_\infty$ la norme infini sur $\mathbf{R}$.

1) Soit h un réel strictement positif, soit t un réel. Établir une majoration du module des complexes $C(t)$ et $D(t)$ où :

   $C(t) = f(t+h) - f(t) - hf'(t)$ et $D(t) = f(t-h) - f(t) + hf'(t)$.
2) En déduire que : $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\|f\|_\infty \ \|f''\|_\infty}$ (inégalité de Kolmogorov).

E Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$, de classe $\mathscr{C}^k$

□ **Exercice 26**

1) Montrer que : $f : x \longmapsto \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}$ définie sur $]-1,1[\setminus \{0\}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.
2) Montrer que : $f : x \longmapsto \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$ définie sur $]0,+\infty[\setminus \{1\}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

□ **Exercice 27** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $\mathbf{R}$

F Fonctions circulaires réciproques

□ **Exercice 28** Etudier les fonctions :

a) $f : x \longmapsto \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\right) - \frac{x}{2}$ *b)* $g : x \longmapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$

c) $h :\longmapsto 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan(x)$ *d)* $k : x \longmapsto 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin(x)$

□ **Exercice 29** Soit g la fonction : $x \mapsto \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1) Quel est le domaine de définition de g ?
2) Déterminer les intervalles sur lesquels g est dérivable, et donner sur chacun d'eux une expression de g à l'aide de la fonction arctan.
3) Retrouver la nouvelle expression de g en calculant $g(\tan\varphi)$.

□ **Exercice 30** Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)+\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.

□ **Exercice 31** Construire la courbe représentative de la fonction :

$$f:\ x \longmapsto \arccos(\cos x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$$

G Applications à valeurs vectorielles

□ **Exercice 32** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que, pour s au voisinage de 0 : $e^{sM} = I + sM + O(s^2)$.

□ **Exercice 33** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que pour s au voisinage de 0,

$$\det(I+sM) = 1 + s\,\mathrm{tr}(M) + O(s^2) \text{ et que } \det(I+sM+O(s^2)) = 1 + s\,\mathrm{tr}(M) + O(s^2)$$

□ **Exercice 34**

1) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x-\omega}$, $\omega \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et calculer $f^{(n)}(x)$.
2) Déterminer la dérivée n-ième de $x \longrightarrow \ln(1+x^2)$.

□ **Exercice 35** Soit $A : I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une application dérivable sur l'intervalle I. On note A' l'application dérivée.

1) Montrer que $A^\top : x \mapsto (A(x))^\top$ est dérivable sur I et que si pour tout x de I, $A(x)$ est symétrique, alors pour tout x de I, $A'(x)$ l'est aussi.
2) Montrer que si pour tout x de I, $A(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors $x \mapsto A(x)^{-1}$ est dérivable sur I. Calculer la dérivée de cette application.

□ **Exercice 36** (Démonstration variationnelle du théorème spectral)

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $((E,(.|.))$ non réduit à son vecteur nul. Soit $\mathscr{S}$ la sphère unité de E.

1) Montrer que l'application $f : x \in \mathscr{S} \mapsto (u(x)|x)$ admet un maximum.

Soit x_0 un point de $\mathscr{S}$ où f est maximale.

2) Soit $h \in (\mathbf{R}x_0)^\perp$. En considérant le développement limité d'ordre 1 en 0 de l'application $t \in \mathbf{R} \mapsto f\left(\frac{x_0+th}{\|x_0+th\|}\right)$, montrer que $h \perp u(x_0)$.
3) En déduire que $u(x_0)$ est un vecteur propre de u.

CHAPITRE 16

Équations différentielles

1 Applications du cours

A Equations différentielles linéaires du premier ordre

□ **Exercice 1** Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $(1+x^2)y'+4xy=0$	(2) $xy'-2y=0$	(3) $y'+xy=1$
(4) $y'+y=e^x+\sin x$	(5) $xy'-y=x^2$	(6) $y'\cos x+y\sin x=1$
(7) $y'+2y=x^2-x+3$	(8) $x^3y'+2(x^2-1)y=0$	(9) $xy'+y=3x^2$
(10) $xy'-y=(x-1)e^x$	(11) $y'+y\tan x=\sin 2x$	(12) $xy'-y=\ln x$
(13) $y'-y=x^2\operatorname{sh} x$	(14) $y'+y=\cos x$	(15) $y'-y=e^x\ln x$

□ **Exercice 2** Résoudre l'équation différentielle $y'-(2-i)y=0$.

□ **Exercice 3** Résoudre $xy'-2y=0$. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 4** Résoudre : $y'\sin(x)-2\cos(x)y=0$. Déterminer la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 5** Résoudre, sur $]0,+\infty[$, le problème de Cauchy : $\begin{cases} xy'-y=x^3 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

□ **Exercice 6** Démontrer que l'équation différentielle $xy'+y=e^x$ admet une unique solution définie sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 7** On considère l'équation différentielle (E) : $y'\ln x+\dfrac{1}{x}y=1$

1) Déterminer les solutions de (E) sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.
2) L'équation (E) admet-elle des solutions sur $]0,+\infty[$?

□ **Exercice 8** Résoudre : $(e^x-1)y'+(e^x+1)y=3+2e^x$. Déterminer les solutions sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 9** Déterminer les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle :

$$xy'(x)+y(x)-\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

□ **Exercice 10** Résoudre l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^2$. Étudier les raccordements éventuels.

□ **Exercice 11** Résoudre l'équation différentielle : $|x|y' + (x^2 - x)y = x^2$. Étudier les raccordements éventuels.

□ **Exercice 12** Résoudre l'équation différentielle : $(1-x^2)y'(x) - 2xy(x) = x^2$. Étudier les raccordements éventuels.

□ **Exercice 13** Étude de l'équation différentielle (E) : $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$.

□ **Exercice 14** Résoudre : $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$. Étudier les raccordements éventuels.

□ **Exercice 15** Résoudre l'équation différentielle : $y'(x) - \frac{x}{x^2-1}y(x) = 2x$ sur $]1, +\infty[$.

□ **Exercice 16** Résoudre l'équation différentielle suivante, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $y'(x) - \tan(x)y(x) = \cos(x)$.

B Equations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants et second membre exponentielle

□ **Exercice 17** Résoudre :

- $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$
- $2y'' - y' - 3y = e^{-x}\cos x$
- $y'' + y' - 2y = e^{-x} + \cos x$,
- $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$
- $y'' - 2\alpha y' + (1+\alpha^2)y = \sin x$ où $\alpha \in \mathbf{R}$

□ **Exercice 18** Chercher les solutions de : $y'' + y' + \dfrac{y}{2} = \sin x$ vérifiant : $y(0) = y'(0) = 0$.

C Equations différentielles linéaires du deuxième ordre : méthodes diverses

□ **Exercice 19** Résoudre (E) $\quad y'' - y = \frac{2e^x}{1+e^x}$.

□ **Exercice 20** Soit : (E_1) $xy' - y + \ln x - 1 = 0$ et (E_2) $x(1 + x(\ln(x) - 2))y'' + (1-x)y' + y - 1 = 0$.

1) Résoudre (E_1).
2) Montrer que parmi l'ensemble des solutions de (E_1), il existe une solution qui vérifie (E_2).
3) Montrer que parmi l'ensemble des solutions de (E_1), il existe une solution qui vérifie (H_2), équation homogène associée à (E_2).
4) Trouver une solution évidente de (E_2).
5) En déduire la solution générale de (E_2) sur des intervalles où elle est résoluble en y''.

□ **Exercice 21** Résoudre l'équation différentielle : $y''(x) + y(x) = f(x)$, où f continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 22** Soit l'équation différentielle : (E) : $y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}$. Résoudre (E).

□ **Exercice 23** Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = \frac{x}{(x-1)^2}e^{-2x}$.

□ **Exercice 24** $y'' - y = |\operatorname{th} x|$

□ **Exercice 25** $y'' + y = \operatorname{cotan}(t)$ où $\operatorname{cotan}(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$.

□ **Exercice 26** Résoudre $(E) : x^2y''(x) - x(x+2)y'(x) + (x+2)y(x) = x(x+1)$ en commençant par chercher une solution évidente de l'équation homogène.

□ **Exercice 27** Soit l'équation différentielle : $(E)\ y'' - 4y = a|x| + b$, $(a,b) \in \mathbf{R}$.

Montrer que (E) admetune unique solution sur $\mathbf{R}$ dont le graphe possède en $-\infty$ et $+\infty$ des droites asymptotes.

□ **Exercice 28**

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad 4xy'' + 2y' + y = 0$

Sachant qu'il existe un intervalle I et deux fonctions f et g solutions de (E) sur I vérifiant : $\forall x \in I f(x)g(x) = 1$, déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur I puis sur $\mathbf{R}$..

□ **Exercice 29** Soit l'équation différentielle : $(1+2x)y''(x) - (2-4x)y'(x) - 8y(x) = 0$.
Résoudre en cherchant une solution particulière $x \longmapsto e^{ax}$, d'abord sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ ou $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, puis sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 30** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = \sin x$

   (remarquer que $x \mapsto x$ est solution de l'équation homogène associée).

2) $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + 2\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}y = 0$

   (chercher un polynôme solution).

3) $x(1-2\ln x)y'' + (1+2\ln x)y' - \dfrac{4}{x}y = 0$

   (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).

□ **Exercice 31**

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et $\Phi : E \to \mathbf{E}$ définie par $\Phi : f \mapsto (t \mapsto f'(t) + tf(t))$.

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.
2) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.
3) Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2-1)y = 0$.

□ **Exercice 32**

Déterminer les éléments propres des endomorphismes Φ suivants :

1) $E = \mathbf{R}[X]$ et $\forall P \in E$, $\Phi(P)(X) = X^2P''(X) + XP'(X)$.
2) $E = \mathscr{C}^\infty(]0, +\infty[)$ et $\forall f \in E$, $\Phi(f)(x) = x^2f''(x) + xf'(x)$.
3) $E = \mathscr{C}^\infty(]0, 1[)$ et $\forall f \in E$, $\Phi(f)(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}f'(x)$.

D Changement de variable

□ **Exercice 33** Sur $]0, +\infty[$, on considère l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2(x+1)^2}y = 0$$

Ramener cette équation à une équation différentielle linéaire à coefficients constants (en utilisant un changement de variable : $y = z \circ \varphi$), puis la résoudre.

□ **Exercice 34** On considère l'équation différentielle :

$$x\,y'' - y' - x^3\,y = 0$$

Ramener cette équation à une équation différentielle linéaire à coefficients constants (en utilisant un changement de variable : $y = z \circ \varphi$), puis la résoudre sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$, puis sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 35** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
2) $y'' - \left(6x + \dfrac{1}{x}\right)y' + 8x^2y = x^4$ (poser $u = x^2$).
3) $x^2y'' + xy' - 4y - 4x^2 = 0$ (poser $x = e^t$ sur $\mathbf{R}^{+*}$).
4) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3 \sin x$ (poser $u = \ln x$).

□ **Exercice 36** On considère l'équation

$$(E) : xy'' + 3y' - 4x^3y = x$$

1) Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation homogène associée.
2) Résoudre (E) sur $\mathbf{R}_+^*$.
3) Résoudre (E) sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 37** Résoudre : $(x^2 + x)y''(x) + (3x + 1)y'(x) + y(x) = 0$ (rechercher une solution développable en série entière).

□ **Exercice 38** Rechercher les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :
$x^2y'' + y = 0$.

(faire le changement de variable $x = e^t$).

E Changement de fonction inconnue

□ **Exercice 39** $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ (poser $u = x^2y$ sur $\mathbf{R}^{+*}$ et $\mathbf{R}^{-*}$; étudier le recollement en 0).

□ **Exercice 40** (Équation de Bernoulli)

Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $(1-x^3)y'+3x^2y+y^2 = 0$. On effectuera le changement de fonction $z = y^\alpha$, avec α judicieusement choisi.

□ **Exercice 41** (Équation de Riccati)

Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $(1 - x^3)y' + x^2y + y^2 - 2x = 0$. On commencera par chercher une solution particulière $y_0 : x \mapsto x^\alpha$ puis on effectuera le changement de fonction $y = z + y_0$.

F Recherche de solutions développables en séries entières

□ **Exercice 42** Résoudre $4xy'' + 2y' - y = 0$ (on cherchera d'abord les solutions développables en séries entières).

□ **Exercice 43** Résoudre $x(x - 1)y'' + 3xy' + y = 0$ (chercher une solution développable en série entière, trouver les solutions définies sur des intervalles les plus grand possibles).

□ **Exercice 44** $x(x^2 + 1)y'' - 2(x^2 + 1)y' + 2xy = 0$ (chercher les solutions développables en série entière).

□ **Exercice 45** Soit l'équation différentielle $(E)\quad xy''(x)+y'(x)-y(x)=0$.

1) Déterminer l'ensemble des solutions développables en séries entières.
2) Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbf{R}$.

G Equations fonctionnelles ou intégrales se ramenant à des équations différentielles

□ **Exercice 46** Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x\in\mathbf{R},\ 2xf(x)=3\int_0^x f(t)\,dt$$

□ **Exercice 47** Résoudre $\forall x\in\mathbf{R}$, $f'(x)+f(-x)=e^x$, où f est une fonction inconnue de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 48** Résoudre l'équation différentielle : $f''(x)+f(-x)=-x+\cos(x)$.

□ **Exercice 49** Trouver les applications g continues de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ vérifiant pour tout $x>0$:

$$\frac{1}{2}\int_0^x g^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

□ **Exercice 50** Trouver les applications continues sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x\in\mathbf{R},\ f(x)+\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=1$$

□ **Exercice 51** Trouver toutes les fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall\, x\in\mathbf{R}\ ,\ \ f(x)-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=1$$

□ **Exercice 52** Déterminer l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\forall\, x\in\mathbf{R}\quad,\quad f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=1$$

H Systèmes différentiels linéaires

□ **Exercice 53** Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases}\operatorname{sh}(2t)x'(t)=\ \operatorname{ch}(2t)x(t)-y(t)\\ \operatorname{sh}(2t)y'(t)=-x(t)+\ \operatorname{ch}(2t)y(t)\end{cases}$$

En sachant qu'il existe une solution telle $xy=1$.

□ **Exercice 54** Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$a)\quad \begin{cases}x'=3x-y+\cos t\\ y'=x+y+2\sin t\end{cases}\qquad b)\quad\begin{cases}x'=y+z-3x\\ y'=z+x-3y\\ z'=x+y-3z\end{cases}\quad ,\ c)\quad\begin{cases}x'=3x+2y-2z\\ y'=-x+z\\ z'=x+y\end{cases}$

□ **Exercice 55** Résoudre le système différentiel : $\begin{cases}x'=-6x+5y+3z+\frac{1}{t}\\ y'=-8x+7y+4z\\ z'=-2x+y+z+\frac{2}{t}\end{cases}$.

□ **Exercice 56** Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{l} x' = 3x + 8y + 2z + \sin t - 4e^t \\ y' = -2x - 5y - z - \sin t + 2e^t \\ z' = 4x + 12y + 3z + 2\sin t - 4e^t \end{array}\right.$.

□ **Exercice 57** Résoudre le problème de Cauchy : $\left\{\begin{array}{l} x' = x + y - z \\ y' = 2y + z \\ z' = 3z \end{array}\right.$

avec $x(0) = 5, y(0) = 3, z(0) = 1$.

□ **Exercice 58**

Déterminer les solutions réelles du système : $\left\{\begin{array}{l} x' = -x + y \\ y' = -y + z \\ z' = -z + x \end{array}\right.$

□ **Exercice 59** Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{l} x' = x + y - z - 1 \\ y' = x - y + z - 1 \\ z' = -x + y + z - 1 \end{array}\right.$.

□ **Exercice 60** Résoudre les système différentiels : $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 2tx(t) - y(t) + t\cos(t) \\ y'(t) = x(t) + 2ty(t) + t\sin(t) \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z \end{array}\right.$

□ **Exercice 61** Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = y(t) + 3e^t \\ y'(t) = \frac{1}{2}(x(t) + y(t)) + e^{-t} \end{array}\right.$.

□ **Exercice 62** Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{array}\right.$.

□ **Exercice 63** Résoudre les systèmes différentiels suivants. En déduire $\exp(tA)$:

$\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \\ z' = x + y + 3z \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} x' = -5x - 3z \\ y' = 14x + y + 7z \\ z' = 14x + 8z \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + z + \operatorname{sh} t \\ y' = x - y - z + \operatorname{ch} t \\ z' = -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t. \end{array}\right.$

□ **Exercice 64** Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$\left\{\begin{array}{l} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{array}\right.$

□ **Exercice 65** Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$a)$ $\left\{\begin{array}{l} x' = y + \cos t \\ y' = -x + 1 \end{array}\right.$ $b)$ $\left\{\begin{array}{l} x' = 7x + 2y - 2z + t \\ y' = 2x + 4y - z + 2t \\ z' = -2x - y + 4z - t \end{array}\right.$

$c)$ $\left\{\begin{array}{l} x' = 3x + y \\ y' = -4x - y \\ z' = 4x - 8y + 2z \end{array}\right.$.

□ **Exercice 66** Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 4y - 2z \\ y' = 4x + y - 2z \\ z' = -2x - 2y - 2z \end{array}\right.$.

□ **Exercice 67** Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = 3y + t \\ y' = 3x + 4z + t \\ z' = x + y + t \end{cases}$.

2 Exercices plus élaborés

A Équations différentielles linéaires du premier ordre

□ **Exercice 68** On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'(x) + y(x) = x^4$.

1) Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
2) Existe t-il des solutions qui admettent une limite finie à droite en 0 ?
Dans ce cas, montrer que ces dernières admettent un développement limité (qu'on déterminera) à tout ordre n en 0.
Sont-elles développables en série entière en 0 ?
3) Déterminer les solutions sur $\mathbf{R}$ de (E), visualiser la situation avec un logiciel.

B Equations linéaires (ou non) du second ordre

□ **Exercice 69** Soit l'équation différentielle : $(E)\ |y''| = y$.

1) On considère une solution f de (E) qui s'annule en un point a de $\mathbf{R}$.
   a) Montrer que $f'(a) = 0$.
   b) Etudier les signes de $g(x) = e^{-x}(f(x) + f'(x))$ et de $h(x) = e^{x}(f(x) - f'(x))$ et prouver que f est la fonction nulle sur $\mathbf{R}$.
2) Donner la forme générale des solutions de (E).

□ **Exercice 70** Résoudre sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle :

$$(1 - \cos(4x))\, y'' + 2\sin(4x)\, y' - 8y = 0$$

sachant qu'il existe deux solutions inverses l'une de l'autre.

C Systèmes différentiels linéaires

□ **Exercice 71**

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit le système différentiel :

$$(E)\ \ X'(t) = A(t)\, X(t)$$

où $A : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est une fonction continue.

Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un système fondamental de solutions de (E), soit

$$t \longmapsto W(t) = W(X_1, \cdots, X_n)(t) = \det(X_1(t), \cdots, X_n(t))$$

son Wronskien (dans la base canonique).

Montrer que : $\forall (s,t) \in \mathbf{R}$, $W(t) = W(s) \exp\left(\int_s^t \mathrm{tr}(A(u))\, \mathrm{d}u\right)$.

On pourra, pour t fixé, considérer l'application φ définie sur $(\mathbf{K}^n)^n$ par :

$$\varphi : (Y_1, \cdots, Y_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \det_{can}(Y_1, \cdots, Y_{i-1}, A(t)\, Y_i, Y_{i+1}, \cdots, Y_n),$$

montrer que φ est multilinéaire alternée, et en déduire le résultat.

2) Appliquer le résultat précédent au wronskien d'un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n :

$$y^{(n)}(t) = a_0(t)y(t) + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ à valeurs scalaires.

□ **Exercice 72** On considère $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ antisymétrique non nulle. On considère l'équation différentielle :

$$(H) \quad X'(t) = AX(t)$$

1) Montrer que pour tout $X \in \mathbf{R}^3$, $< X, AX >= 0$. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$
2) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 2$.
3) Quelles sont les solutions constantes de (H) ?
4) Soit X une solution de (H).
   a) Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|$ est constante.
   b) Montrer qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $X(t) \in \mathcal{C}$.

□ **Exercice 73** Soit $(U, V, X_0) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})^3$, $U \neq 0$, $V \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $B = UV^\top$ et $A = \lambda I_n + B$.

1) Déterminer la solution du problème de Cauchy :

$$X'(t) = AX(t) \quad , \quad X(0) = X_0$$

   en fonction de λ, $\mathrm{tr}(B)$, B, X_0 et t.
2) Quels sont les sous-espaces E de $\mathbf{R}^n$ tels que : $X_0 \in E \Longrightarrow (\forall t \in \mathbf{R} \quad , \quad X(t) \in E)$.
3) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que toute solution possède une limite finie en $+\infty$.

D Equations fonctionnelles

□ **Exercice 74** Déterminer toutes les applications $f\ :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, telle que f soit dérivable sur $]0, +\infty[$, et :

$$\forall\, x \in]0, +\infty[\ , \ f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)$$

On résoudra l'équation d'ordre 2 associée à l'aide du changement de variable $x = e^t$.

E Études qualitatives d'équations linéaires

□ **Exercice 75** Soit a une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et bornée sur $\mathbf{R}$. On considère l'équation différentielle $y' - ky = a$ avec $k \in]0, +\infty[$. Montrer qu'elle admet une unique solution bornée sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 76** Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

1) On pose $g = f + f'$.
   a) Calculer f en fonction de g.
   b) Montrer que si g a une limite nulle en $+\infty$, il en est de même de f.
   c) Que se passe-t-il si $\lim\limits_{+\infty} g = \ell$.
2) On pose $h = f + f' + f''$. Calculer f en fonction de h. Montrer que si h a une limite nulle en $+\infty$, il en est de même de f.

□ **Exercice 77** Soit l'équation différentielle $(E) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$, avec a et b à valeurs réelles et continues sur l'intervalle I.

1) Montrer qu'aucune solution non nulle n'a de zéro commun avec sa dérivée.
2) Soit y une solution non nulle et x_0 tel que $y(x_0) = 0$. Montrer que l'ensemble $\{x > x_0 \mid y(x) = 0\}$ est soit vide soit admet un plus petit élément x_1. Dans ce cas, on dit que x_0 et x_1 sont des zéros consécutifs de y.
3) Soient (f, g) une famille libre de solutions de (E). Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f se trouve un zéro de g.
4) Si $a = 0$ et $b \leqslant 0$, montrer que toute solution non nulle de (E) s'annule au plus une fois.
5) Soient b_1 et b_2 deux fonctions réelles continues sur l'intervalle I telles que $b_1 \leqslant b_2$, et f_1 et f_2 non nulles, vérifiant respectivement $f_1'' + b_1 f_1 = 0$ et $f_2'' + b_2 f_2 = 0$.

   Montrer qu'entre deux zéros consécutifs u et v de f_1 se trouve un zéro de f_2, si f_1 et f_2 ne sont pas proportionnelles sur $[u, v]$.

□ **Exercice 78** Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifiant $\forall\, x \in \mathbf{R}, f''(x) + f(x) \geqslant 0$.
Montrer que : $\forall\, x \in \mathbf{R}, f(x) + f(x + \pi) \geqslant 0$.

□ **Exercice 79**

1) Soit u une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - y = u \qquad , \qquad y(0) = y'0) = 0$$

2) En déduire que si h est une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ telle que : $h(0) = h'(0) = 0$ et pour tout réel x : $h''(x) \geqslant h(x)$, alors l'application h est positive sur $\mathbf{R}$.
3) Montrer que si f est une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout réel x : $f''(x) \geqslant f(x) + \frac{2}{\operatorname{ch}^3(x)}$, alors : pour tout réel x : $f(x) \geqslant \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

F Systèmes différentiels linéaires

□ **Exercice 80** Résoudre les systèmes différentiels :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -\tan(t)\,x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + \tan t y(t) \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} (1+t^2)x'(t) = tx(t) - y(t) - t \\ (1+t^2)y'(t) = x(t) + ty(t) - 1 \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} (1+t^2)x'(t) = tx(t) - y(t) + 2t \\ (1+t^2)y'(t) = x(t) + ty(t) - 1 \end{array}\right.$$

□ **Exercice 81** On note $\|.\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ subordonnée à la norme précédente.

Soit $A : \mathbf{R}^+ \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une fonction continue telle que $t \mapsto \|A(t)\|_{\mathrm{op}}$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

1) Soit $X : \mathbf{R}^+ \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ dérivable vérifiant $\forall t \in \mathbf{R}^+ \; X'(t) = A(t)X(t)$.

   a) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbf{R}^+$ tels que $a \leqslant b$,

$$\begin{aligned} \|X(b)\| &\leqslant \|X(a)\| \exp\left(\int_a^b \||A(s)\||ds\right) \\ \text{et } \|X(a)\| &\leqslant \|X(b)\| \exp\left(\int_a^b \||A(s)\||ds\right) \end{aligned}$$

   b) Montrer que X est bornée.
   c) Montrer que X a une limite finie à l'infini.

   (On pourra appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite $(X(n))_{n\in\mathbf{N}}$)

2) Montrer que l'application de l'ensemble F des solutions sur $\mathbf{R}^+$ de l'équation $X' = AX$ vers $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ qui à tout $X \in F$ associe $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t)$ est un isomorphisme.

CHAPITRE 17

Intégrales à paramètre

□ **Exercice 1** On définit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
2) Montrer que $f + g^2$ est constante.
3) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 2**

1) Calculer pour $x > 0$: $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2(t) + x\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

   On posera $u = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$.

2) En déduire pour $x > 0$: $G(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(t)}{(\cos^2(t) + x\sin^2(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 3** Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer son domaine de définition.
2) Étudier sa continuité et sa dérivabilité.
3) Calculer $F(x)$.

□ **Exercice 4** On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} (\arctan t)\, e^{-tx}\,\mathrm{d}t$

1) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f
2) La fonction f est-elle continue sur $\mathscr{D}$? de classe $\mathscr{C}^1$?
3) Déterminer des équivalents de f en 0 et à l'infini.

□ **Exercice 5** Calculer $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2 - itx}\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 6** Soit $f(x, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t-y)^2 + x^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer f.

□ **Exercice 7** On pose, lorsque cela a un sens, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,dt$.
Montrer que F est définie sur $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^\star$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star \qquad F'(x) + 2F(x) = 0$$

En déduire une expression simple de F.

□ **Exercice 8** Soit $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

1) La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$?
2) Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.
3) Déterminer un équivalent de f en 0, puis un développement asymptotique à deux termes.

□ **Exercice 9** Soit la fonction $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$.
2) Expliciter $f'(x)$ et en déduire $f(x)$.
   On donne la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

□ **Exercice 10** Soit $f : x \longmapsto \int_{]0,+\infty[} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}$.
2) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
3) Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$. Que se passe-t-il pour $x \leqslant 0$.
4) Montrer que : $\int_{]0,+\infty[} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \pi \ln 2$.

□ **Exercice 11** Soit la fonction $F : x \longmapsto \int_0^1 t^x \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de F.
2) Étudier la continuité de F et ses limites aux bornes.
3) Montrer que $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+n+1)^2}$. En déduire $F(0)$ et $F(1)$.

□ **Exercice 12** On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{1}{t}\ln(1-2t\cos(x)+t^2)\,\mathrm{d}t$.

Étudier f et l'expliciter.

□ **Exercice 13** On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^{+*}$. Expliciter $f'(x)$, pour $x > 0$.
2) A l'aide du critère spécial des séries alternées, en écrivant :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

   montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^+$.
3) Retrouver alors la valeur de l'intégrale de Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

□ **Exercice 14** On pose $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \ln(x+\cos t)\,dt$

1) Déterminer son ensemble de défiition.
2) Démontrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$.
3) En déduire une expression simple de f. On pourra poser $u = \tan \frac{t}{2}$ dans l'expression de f'.

□ **Exercice 15** (Intégrale de Poisson)
On pose, pour x réel, $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier la définition de $I(x)$ et établir, pour x non nul, $I\left(\dfrac{1}{x}\right) = I(x) - 2\pi \ln|x|$.
2) Montrer que la fonction I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et préciser I' sur cet intervalle.
On pourra dans le calcul de I' poser $u = \tan \frac{t}{2}$.
3) En déduire la valeur de $I(x)$, pour tout réel x.

□ **Exercice 16** Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$.

1) Étudier l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ et la continuité de F.
2) La fonction F est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$?
3) Déterminer un équivalent simple quand x tend vers 0 par valeurs supérieures de $F(x)$. On donne la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
4) Déterminer un équivalent simple de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 17** Pour $x > 0$, on note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1) Montrer que : $x \longmapsto \displaystyle\int_{]0,\frac{\pi}{4}[} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ est constante sur $\mathbf{R}$ et en déduire la valeur de Γ en $\frac{1}{2}$
2) Montrer que $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$

□ **Exercice 18** Soit la fontion $x \longmapsto f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$. Donner son ensemble de définition de f, puis étudier la continuité et la dérivabilité de f.

□ **Exercice 19** Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t$

1) Etudier l'ensemble de définition A et la continuité de F.
2) Déterminer un équivalent pour $x \to +\infty$ de $F(x)$.
3) La fonction F est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ?

□ **Exercice 20** Soit $f(x) = \displaystyle\int_{[1,+\infty[} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition de f, étudier la continuité de f.
2) Donner un équivalent simple de f au voisinage de 0 et de $+\infty$.

□ **Exercice 21** Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1) Quel est le domaine de définition de F ?
2) Étudier la continuité et la dérivabilité de F.
3) Calculer $F(x)$.

□ **Exercice 22** Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Ensemble de définition de F .
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de F.
3) Calculer $F'(x)$, puis $F(x)$.

□ **Exercice 23** Soit $f(x) = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Trouver le domaine de définition de f.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$.
3) Calculer $f - f'$ à l'aide de l'intégrale de Gauss.
4) Donner un équivalent simple de $f'(x)$ pour $x \to +\infty$.
5) Montrer que $f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + o_{+\infty}\Big(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\Big)$.
6) Tracer la courbe de f.

□ **Exercice 24** Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}+t+1}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer son ensemble de définition et étudier sa continuité.
2) Étudier sa monotonie.
3) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
4) Déterminer un équivalent de $F(x)$ en 0, en commençant par faire un changement de variable.
5) Retrouver ce résultat en commençant par calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}+t}\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 25** Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{t^x}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F est définie sur $\mathbf{R}$, croissante et continue.
2) Déterminer les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$.
3) Montrer que, pour $x > 0$, $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}$.

□ **Exercice 26** On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1) Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur des intervalles à déterminer
2) Chercher des équations différentielles vérifiées par f et g.
3) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbf{R}^+$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 27** Déterminer $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{(1-x)(1+ax)}}\,dx$.

□ **Exercice 28** Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier l'existence de $f(x)$ pour $x > 0$.
2) Développer f en série de fonctions rationnelles.
3) Montrer que : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.
4) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

□ **Exercice 29** Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b-\cos t}{a-\cos t}\right)\mathrm{d}t$, $a > 1$, $b > 1$.

On pourra utiliser la fonction $f \;:\; x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x-\cos t)\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 30** Soit f une application continue et intégrable de $[1,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$. On pose

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^x}\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$.
2) Donner un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   On pourra montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{f(t)}{t^x}\mathrm{d}t = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ *et déterminer un équivalent simple de* $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(t)}{t^x}\mathrm{d}t$, *en commençant par faire un changement de variable adapté.*
3) On suppose seulement que $T \longmapsto \displaystyle\int_1^T f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en $+\infty$ (et non que f est intégrable). Continuité de F en 0 ?

□ **Exercice 31** On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(1+xt^2)}}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de F, montrer que F est continue sur cet ensemble.
2) Déterminer une relation entre $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$.
3) Déterminer les limites de F aux bornes de l'intervalle de définition.
4) Déterminer un équivalent de F en 0 ; en déduire un équivalent de F en $+\infty$.

□ **Exercice 32** Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 33** Pour x réel, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer l'intervalle I de $\mathbf{R}$ sur lequel la fonction φ est définie.

   Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

   Etudier le sens de variation de φ'. En déduire que φ est convexe sur I.
2) a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par φ sur I.
   b) En déduire que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I
   c) Déterminer la limite de φ en $+\infty$. En déduire la limite de φ' en $+\infty$.
   d) Pour $x \in I$ et $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)$ sous forme d'une somme, et en déduire la limite de $\varphi^{(k)}$ en $+\infty$.
3) a) Montrer que : $\forall x \in I\ ,\ \ \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.
   b) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right) = 0$.
   En déduire un équivalent de $\varphi(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   c) Montrer que φ admet un développement asymptotique (que l'on déterminera) au voisinage de $+\infty$, à la précision $\frac{1}{x^3}$.
4) Montrer que : $\forall x \in I\ ,\ \ \varphi(x) = e^x \displaystyle\int_{[x,+\infty[} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

   En déduire que : $\varphi(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$. Tracer le graphe de φ.

□ **Exercice 34** Montrer que $\varphi\ :\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

□ **Exercice 35** Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2) Montrer que : $\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{x-1} f\left(\frac{x}{x-1}\right)$.
3) En déduire un équivalent de f en 1.

□ **Exercice 36** Calcul de l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

   Déterminer la limite de F en $+\infty$.
2) Montrer que : $F'(x) = -I\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ et que $F(x) = \frac{\pi}{2} - I\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ pour tout x strictement positif.
3) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2I$, et en déduire, à l'aide d'un passage à la limite dans l'expression de F la valeur de I.

□ **Exercice 37** Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer l'ensemble de définition I de f ; montrer que f est continue sur I.
2) Soit $k = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$. Montrer que f satisfait à l'équation différentielle : $y'(x) - y(x) = -\frac{k}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

   En déduire une nouvelle expression de f.

   En étudiant la limite de f en $+\infty$, déterminer k.
3) Tracer l'allure du graphe de f sur $[0, +\infty[$.

□ **Exercice 38** On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\,dt$.

1) Donner le domaine de définition de f.
2) Étudier les variations de f.
3) Trouver la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 39** Soit la fonction f définie par : $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{sh}\,(xt)e^{-t}dt$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. Etudier la continuité et la dérivabilité de f.
2) Calculer f.

□ **Exercice 40** Ensemble de définition et calcul de : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 41** Soit $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$; $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de $\sum\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\right)$, puis sa somme. *On pourra utiliser le développement en série entière de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.*
2) Soit $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$, $g_s(t) = F(t)e^{-\frac{t}{s}}$ pour $s \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

   Montrer que g_s est intégrable sur $[0, +\infty[$.
3) Montrer que g_s est développable en série entière.

□ **Exercice 42** Soit la fonction de variable réelle f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f ; montrer que f est continue sur cet ensemble.
2) Pour tout $x > 0$, pour tout entier naturel n, on pose $f_n(x) = \displaystyle\int_0^n \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que pour tout n, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et que :

$$\forall\, x > 0 \ \ , \ \ f_n'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{n\cos(nx)}{1+n^2} - \int_0^n \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right)$$

b) Montrer que la suite (f_n') converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers une fonction g qu'on précisera, puis que, si $a>0$, (f_n') converge uniformément vers g sur $[a,+\infty[$.

Que peut-on en déduire pour f ?

c) Montrer que $x \longmapsto xf'(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, calculer la dérivée de cette application.

Déduire de ce qui précède que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, et un équation différentielle vérifiée par f

d) Résoudre cette équation, et déterminer f.

□ **Exercice 43** On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 - \sin^2(t))\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

On pourra poser $u = \tan(t)$ pour calculer l'intégrale définissant $f'(x)$.

2) Déterminer l'ensemble de définition de f.

3) On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$.
Vérifier que $I = J$ et en déduire la valeur de I.

4) a) Justifier que ch réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$. On note argch sa bijection réciproque.
   b) Montrer que argch est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.

5) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$, puis $f(x)$ pour $x > 1$.

6) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

□ **Exercice 44** Soit la fonction f définie par $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}\cos(yt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $x \longmapsto f(x,0)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
En déduire la valeur de $f(x,y)$ sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$.

2) Montrer que $y \longmapsto f(0,y)$ est continue sur $\mathbf{R}$.

On pourra utiliser une intégration par partie.

□ **Exercice 45** Soit $a<b$ et $c<d$. Soit f une application continue sur $[a,b]\times[c,d]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. On veut démontrer le théorème de Fubini qui affirme que

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(u,t)dt\right) du = \int_c^d \left(\int_a^b f(u,t)du\right) dt$$

Pour tout $(x,t)\in[a,b]\times[c,d]$, on pose : $\varphi(x,t) = \displaystyle\int_a^x f(u,t)du$.

1) Montrer que pour tout $x\in[a,b]$, l'application $t\mapsto\varphi(x,t)$ est continue sur $[c,d]$.

On pose alors, pour tout $x\in[a,b]$: $\psi(x) = \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)dt$.

2) Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$; préciser ψ'.

3) En déduire :

$$\forall x\in[a,b], \quad \int_a^x \left(\int_c^d f(u,t)dt\right) du = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)du\right) dt.$$

4) Conclure

CHAPITRE 18

Calcul différentiel

A Dérivées partielles, différentiabilité, classe $\mathscr{C}^k$

□ **Exercice 1** Soit $f; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction$f$ est-elle différentiable sur $\mathbf{R}^2$? de classe $\mathscr{C}^1$?

□ **Exercice 2** Étudier les fonctions suivantes (continuité, prolongement par continuité, existence de dérivées partielles, différentiabilité, classe $\mathscr{C}^1$).

a) $(x,y) \longmapsto \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, b) $(x,y) \longmapsto x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$, c) $(x,y) \longmapsto \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$,

d) $(x,y) \longmapsto \frac{1-e^{-xy^2}}{y}$, e) $(x,y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2+2y^2}}$, f) $(x,y) \longmapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

□ **Exercice 3** Soient $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ et $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ , \ g(x,y) = f(y,x) \ , \ \forall\, x \in \mathbf{R} \ , \ h(x) = f(x,x)$$

On suppose que f est différentiable sur $\mathbf{R}^2$. Montrer que g (resp. h) est différentiable sur $\mathbf{R}^2$ (resp. dérivable sur $\mathbb{R}$), et calculer ses dérivées partielles (sa dérivée).

□ **Exercice 4** Soit f une application continue sur $\mathbf{R}$. Soit $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ , \ F(x,y) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$, écrire $dF(x,y)$.

□ **Exercice 5** Montrer que l'application $f : (x,y) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)\sin(ny)}{n^4}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

□ **Exercice 6** Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) = \left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0).$$

Etudier la continuité de f en $(0,0)$. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?

□ **Exercice 7** Soit $(E, (\,|\,))$ un espace euclidien, et u un endomorphisme de E.

Etudier la différentiabilité de $f\ :\ x \longmapsto (u(x)|x)$ en $x \in E$, et déterminer df_x. Que dire si u est un endomorphisme symétrique de E ?

□ **Exercice 8** Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Soit F une application définie sur $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\} \quad , \quad F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2)-f(0)}{x^2+y^2}$$

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.
2) a) Montrer que F est différentiable en $(0,0)$ et déterminer $dF_{(0,0)}$.
   b) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

□ **Exercice 9** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f : (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$.

On suppose que u et v sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

1) Ecrire la matrice jacobienne $J(x,y)$ de f.
2) On suppose que pour tout (x,y) de $\mathbf{R}^2$, $J(x,y)$ est une matrice de rotation et on pose

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} C(x,y) & -S(x,y) \\ S(x,y) & C(x,y) \end{pmatrix}$$

   Montrer que S et C sont constantes.
3) Déterminer $u(x,y)$ et $v(x,y)$.

□ **Exercice 10** Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta < 1$.

L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction f définie pour tout x et y strictement positifs, $x \neq y$, par $f(x,y) = \frac{x^\alpha - y^\alpha}{x^\beta - y^\beta}$.

1) a) Soit $\alpha > 1$; montrer que la fonction $\varphi\ :\ t \longmapsto \frac{1-t^\alpha}{1-t}$ est prolongeable en une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
   b) Etudier les variations de φ.
2) Soit $U =]0,+\infty,[\times]0,+\infty,[$;

   a) Montrer que la fonction f définie sur U par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha - y^\alpha}{x^\beta - y^\beta} & \text{si} \quad x \neq y \\ \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

   est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
   b) Montrer que : $\forall (x,y) \in U$, $\forall \lambda > 0$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha-\beta} f(x,y)$.
3) En déduire que : $\forall (x,y) \in U$, $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\alpha - \beta) f(x,y)$.

   Rechercher les points critiques de f sur U.
4) Quel est l'image $f(U)$?

□ **Exercice 11** Démontrer que $f\ :\ \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $f(A) = A^3$ est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et déterminer sa différentielle.

□ **Exercice 12**

1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2) Montrer que l'application $f : A \mapsto A^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et déterminer la différentielle de f en A.

On pourra commencer par montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : V \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, telle que :

$$\forall H \in V \quad , \quad (I_n + H)^{-1} = I_n - H + \|H\| \varepsilon(H)$$

avec $\lim\limits_{H \to 0} \varepsilon(H) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}$.

□ **Exercice 13** Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On définit :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ , \ x \neq 0 \ , \ F(x,y) = \frac{1}{x} \int_x^{xy} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Montrer qu'on peut définir $F(0,y)$ de telle manière que F soit continue sur $\mathbf{R}^2$

Montrer qu'alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$, écrire $dF(x,y)$.

□ **Exercice 14** Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.
On dit que f est homogène de degré α si :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ , \ \forall t \in]0, +\infty[\ , \ f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)$$

On suppose que f est différentiable sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1) Montrer que si f est homogène de degré α, alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ , \ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

2) Examiner la réciproque.
3) Déterminer les fonctions f homogènes différentiables sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ , \ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4 + 2y^4}$$

□ **Exercice 15**

1) Montrer que $f : M \mapsto M^2$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et expliciter $\mathrm{d}f(A)$, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
2) Montrer que, si A est diagonalisable, à valeurs propres strictement positives, alors $\mathrm{d}f(A)$ est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

□ **Exercice 16** Montrer que l'application $f : M \mapsto \det M$ est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et que :

$$\forall (M,H) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \quad \mathrm{d}f_M(H) = \mathrm{tr}(\tilde{M}H) \quad (\text{où } \tilde{M} = \mathrm{Com}(M)^\top).$$

On pourra commencer en étudiant le cas $n = 2$, en prenant $H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 17** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. On pose, sur $E \setminus \{0\}$,

$$q(x) = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}$$

Montrer que q est différentiable, et déterminer sa différentielle en x.

□ **Exercice 18** Soit E euclidien et a un endomorphisme symétrique. On pose, pour $x \in E$ euclidien, $f(x) = \frac{1}{2}(a(x)|x) - (b|x)$
Calculer $f(x+u) - f(x)$, montrer que f admet des dérivées partielles, calculer le gradient de f en x.

□ **Exercice 19** Déterminer la classe de l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

□ **Exercice 20** On pose $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ , \ xy \neq 1\}$.

Soit f la fonction de U dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \arctan x + \arctan y - \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

Calculer les dérivées partielles de f. Conclure.

□ **Exercice 21** Soit $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x > 0 \text{ et } y > 0\}$ et $V = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ v > 0\}$. On pose $\varphi : U \to V$ définie par $\varphi : (x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$.

Soit $F : \mathbf{R}^2 \longmapsto \mathbf{R}$ on pose $f = F \circ \varphi$.

1) Étudier les qualités de φ.
2) Calculer $\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de F.

□ **Exercice 22** Soit $f : \mathbf{R}^2 \longmapsto \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, et soit $F :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\to \mathbf{R}$ définie par $F : (\rho,\theta) \mapsto f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.
Calculer l$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de F.

□ **Exercice 23** Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Pour $f \in E$, on définit $\Omega_a(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + a\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

1) Montrer que Ω_a est un endomorphisme de E.
2) Trouver le noyau de Ω_a (on pourra poser $u = x, v = y - ax$).
3) Pour n entier naturel, exprimer Ω_a^n à l'aide des dérivées partielles de f.

□ **Exercice 24** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note D le disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon R et f la fonction définie sur D par

$$f : (x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+iy)^n$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D.

B Équations aux dérivées partielles

□ **Exercice 25** Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes (on donnera les solutions différentiables dans le cas des équations d'ordre 1 et les solutions de classe $\mathscr{C}^2$ dans le cas des équations d'ordre 2 ; on utilisera le changement de variable indiqué) :

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)f(x,y) = 0$, $(u = x-y, \ v = x+y, \ x > y)$
2) $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $u = x+y$, $v = x+2y$.
3) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$ avec $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

4) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$, en passant en polaires sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$.
5) $2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $x = \frac{u^2+v^2}{2}$, $y = \frac{u}{v}$, $x > 0$.
6) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x} + f = 0$, en faisant le changement de variables $u = x+y$, $v = x-y$.

□ **Exercice 26** Trouver les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ telles que la fonction $\varphi : (x,y) \mapsto f\left(\frac{y}{x}\right)$ définie sur $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ vérifie $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$.

□ **Exercice 27** Trouver les applications f de classe $\mathscr{C}^1$ sur le demi-plan $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ vérifiant :

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = x + y + f(x,y)$$

On pourra passer en coordonnées polaires.

□ **Exercice 28** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in U \quad , \quad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = af(x,y)$$

où a est un réel et $U = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. *On pourra passer en coordonnées polaires.*

□ **Exercice 29** Soit $D = \{(x,0) \in \mathbf{R}^2\ ;\ x < 0\}$. Déterminer les applications $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2 \setminus D, \mathbf{R})$ telles que :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

□ **Exercice 30** Soient $b, c \in \mathbf{R}$ et $(E)\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + c\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ où l'inconnue f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$.

1) On suppose que $X^2 + bX + c$ a deux racines réelles λ et μ éventuellement confondues. Montrer que
$$(E) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda\frac{\partial}{\partial y}\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \mu\frac{\partial}{\partial y}\right)(f) = 0$$
où $\frac{\partial}{\partial x}$ désigne l'application linéaire $\mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}) \ni f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ (idem *mut. mut.* pour $\frac{\partial}{\partial y}$)
2) On suppose que $\lambda \neq \mu$. On pose $X = x - \lambda y$, $Y = x - \mu y$. Montrer qu'on définit bien ainsi une bijection de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même, de classe $\mathscr{C}^2$ ainsi que sa réciproque, et qu'en posant $F : (X,Y) \mapsto f(x,y)$, on a :
$$(E) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y} = 0$$
Résoudre (E).
3) On suppose que $\lambda = \mu$. Montrer qu'en posant $X = x - \lambda y$, $Y = x - \nu y$ avec $\nu \neq \lambda$, et $F : (X,Y) \mapsto f(x,y)$, on a :
$$(E) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = 0$$
Résoudre (E).
4) On suppose que $X^2 + bX + c$ a deux racines imaginaires conjuquées $\alpha \pm i\beta$. Montrer que
$$(E) \Leftrightarrow \left((\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\frac{\partial}{\partial y})^2 + \beta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(f) = 0$$

où $(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\frac{\partial}{\partial y})^2 = (\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\frac{\partial}{\partial y}) \circ (\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\frac{\partial}{\partial y})$

Donner un changement de variables tel que

$$(E) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = 0$$

(on ne demande pas de résoudre (E) dans ce dernier cas)

C Problèmes d'extremum

□ **Exercice 31** Déterminer les extremas des fonctions suivantes sur le domaine D stipulé.

$a)$	$f(x,y) = x + y - x^2 - xy - y^2$	$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;;\; 0 \leqslant x \;,\; 0 \leqslant y \;,\; x+y \leqslant 1\}$
$b)$	$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$	$D = \mathbf{R}^2$
$c)$	$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$	$D = \mathbf{R}^2$
$d)$	$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$	$D = \mathbf{R}^2$
$e)$	$f(x,y) = xe^y + ye^x$	$D = \mathbf{R}^2$
$f)$	$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$	$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;;\; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
$g)$	$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$	$D = \mathbf{R}^2$
$h)$	$f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$	$D =]0,\pi[^2$
$i)$	$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$	$D = \mathbf{R}^2$
$j)$	$f(x,y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$	$D = [0,1]^2$
$k)$	$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$	$D = \mathbf{R}^3$

□ **Exercice 32** Déterminer le minimum de la somme des distances d'un point M à trois points non alignés A, B et C du plan euclidien.

□ **Exercice 33** Un bâton de longueur ℓ est cassé en trois morceaux de longueur x, y, z. Trouver x, y et z pour que le produit xyz soit maximum.

□ **Exercice 34** Déterminer les triangles d'aire maximum inscrits dans un cercle de diamètre d.

□ **Exercice 35** Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de surface donnée S, quel est celui dont le volume est maximum ?

□ **Exercice 36** Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1.x_2.\ldots.x_n$.

On note $\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}_+^n,\ x_1 + \ldots + x_n = 1\}$.

Démontrer que f admet un maximum global sur Γ et le déterminer. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1,, x_n) \in \mathbf{R}_+^n$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

□ **Exercice 37** Soit $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer qu'elle est convexe si et seulement si sa matrice hessienne est positive (appartient à S_n^+) en tout point.

□ **Exercice 38** Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions f suivantes sur leur domaine de définition sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

$a)$	$f(x,y) = xy$	$g(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$
$b)$	$f(x,y) = \ln(x-y)$	$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$
$c)$	$f(x,y) = x^2 + y^2$	$g(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - 1$
$d)$	$f(x,y) = 2x + y$	$g(x,y) = x^2 + xy - y^2 - 1$
$e)$	$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$g(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}$
$g)$	$f(x,y) = x^2 + y^2 + (y-x)^2$	$g(x,y) = x^2 + y^2 + 2y - 2x - 6 = 0$

□ **Exercice 39** Soient a, b, c trois réels tels que $0 < a < b < c$.

Déterminer les extrema de $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ sur la surface $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1\right\}$.

□ **Exercice 40** Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Déterminer les extrema de f sur $SL_2(\mathbf{R})$. Montrer que ces extrema sont atteints en les points de $SO_2(\mathbf{R})$, et seulement en ces points.

□ **Exercice 41** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} = \min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i x_i\ ;\ (u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n,\ \prod_{i=1}^n u_i = 1\right\}$$

En déduire que pour tous $y_1, \ldots, y_n > 0$,

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)\right)^{1/n}$$

CHAPITRE 19

Algèbre générale

1 Applications du cours

A Groupes : généralités

□ **Exercice 1**

1) Montrer que $(]-1,1[,*)$ est un groupe pour la loi $*$ définie par :

$$\forall\ (x,y)\ \in\ ]-1,1[^2\ \ ,\ \ x*y=\frac{x+y}{1+xy}$$

2) Pour $x\in]-1,+1[$, exprimer $x^{(n)}$ en fonction de x et n.

On pourra utiliser une formule de trigonométrie hyperbolique.

□ **Exercice 2** Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer $B=A^2$, $C=A^3$, $A+C$ et $U=A^4$.
2) Montrer que : $(\{U,A,B,C\},\times)$ est un groupe commutatif.

□ **Exercice 3** Soient $(G_1,.)$ et $(G_2,*)$ deux groupes. On rappelle que le produit cartésien $G_1\times G_2$, muni de la loi produit :$(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2)=(x_1.y_1,x_2*y_2)$ est un groupe.

1) Soit H le groupe $(\{-1,1\},\times)$. En notant e,a,b,c les éléments de $H\times H$, faire la table de ce dernier groupe.
2) Montrer que le groupe produit de $(\mathbf{R}^{+*},\times)$ par $(\mathbb{U},\times)$ est isomorphe au groupe $(\mathbf{C}^*,\times)$

□ **Exercice 4** Soit $(G,.)$ un groupe . Montrer que la réunion d'une suite croissante de sous-groupes de G est un sous-groupe de G .

□ **Exercice 5** Soit $*$ la loi de composition interne définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2\quad,\quad x*y=x+y-xy$$

1) Propriétés de la loi $*$?
2) Pour la loi $*$, $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ est-il un groupe ?

3) Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, exprimer l'itéré n fois de x par $*$.

□ **Exercice 6** Soit $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \right\}$.

1) Montrer que D est un groupe multiplicatif.
2) Déterminer le centre du groupe (i.e. les éléments de D qui commutent avec tous les autres).

□ **Exercice 7** Soit $(G, *)$ un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble de ses automorphismes. La composition munit $\mathrm{Aut}(G)$ d'une structure de groupe.

Pour tout élément $g \in G$ on note φ_g l'application de G dans lui-même définie par

$$\varphi_g : h \mapsto ghg^{-1}$$

1) Soit $g \in G$, montrer que φ_g est un automorphisme de G.
2) On considère l'application $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ qui associe à g l'application φ_g. Montrer que Φ est un morphisme de groupe.

B Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, ordre d'un élément d'un groupe, générateurs des groupes monogènes

□ **Exercice 8** Soient $(G, .), (H, .)$ des groupes cycliques de cardinaux respectifs m et n.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de ces groupes soit cyclique.

C Groupe symétrique

□ **Exercice 9**

1) Vérifier que $(1, 3, 4, 7) = (1, 3)(3, 4)(4, 7)$.
2) On considère le cycle $\gamma = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in \mathfrak{S}_n$ $(2 \leqslant p \leqslant n)$ où les a_i sont à deux à deux distincts. Démontrer que $\gamma = \prod_{i=1}^{p-1} (a_i, a_{i+1}) = (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ \ldots \circ (a_{p-1}, a_p)$.

□ **Exercice 10** On considère la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_9$.

1) Décomposer σ en produit de cycles.
2) Décomposer σ en produit de transpositions.
3) Quel l'ordre de σ dans $\in \mathfrak{S}_9$? Calculer σ^{1000}.
4) Déterminer la signature de σ.

□ **Exercice 11** On considère la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$.

1) Décomposer σ en produit de cycles.
2) Décomposer σ en produit de transpositions.
3) Déterminer la signature de σ.

□ **Exercice 12** Soient τ_1 et τ_2 deux transpositions de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $\tau_1 \circ \tau_2 = id$ ou $(\tau_1 \circ \tau_2)^2 = id$ ou $(\tau_1 \circ \tau_2)^3 = id$.

□ **Exercice 13** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_9$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer σ^{2000}.

n) Dans $\mathfrak{S}_7$, écrire $\sigma = \rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1$ puis $\sigma' = \rho_2 \circ \rho_1 \circ \rho_3$ comme produit de cycles opérant sur des ensembles disjoints où :

$$\rho_1 = (1,3,5,2) \ , \ \rho_2 = (2,6,5,7) \ , \ \rho_3 = (5,4,7,3)$$

Même question dans $\mathfrak{S}_5$ avec $\sigma = (1,4) \circ (1,2,3) \circ (4,5) \circ (1,4)$.

□ **Exercice 15** Soit $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

1) Nombre de permutations de E ?
2) Soit $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ une permutation de E (l'image de $i \in E$ est x_i).
   On pose N le nombre dont l'écriture en base 10 est $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ et on classe ces nombres (ensemble noté S) par ordre croissant.

   Quel est le premier, le dernier, le $121^{\text{ième}}$?

   Que vaut $\sum\limits_{N \in S} N$?
3) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall\, n \in S \quad , \quad \exists n' \in S \quad \text{tel que } n + n' = k$$

   Exemple de k ? Retrouver $\sum\limits_{N \in S} N$.

D Anneaux : généralités

□ **Exercice 16** Soit m un nombre réel. Pour (x,y) et (x',y') appartenant à $\mathbf{R}^2$, on pose :

$$(x,y) * (x,y) = (xx' + myy', xy' + yx')$$

1) Démontrer que $(\mathbf{R}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.
2) Pour quelles valeurs du réel m cet anneau est-il intègre ?

□ **Exercice 17** Soit $(A,+,.)$ un anneau , $(a,b) \in A^2$ tels que :

$$a.b + b.a = 1 \quad , \quad a^2.b + b.a^2 = a$$

1) Montrer que : $a^2.b = b.a^2$ et $2a.b.a = a$.
2) Etablir que a est inversible et que son inverse est $2b$.

□ **Exercice 18** On pose : $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x \oplus y = x + y + 1$ et $x \otimes y = x + y - xy$.
Démontrer que $(\mathbf{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps commutatif.

□ **Exercice 19** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que : $H = \{aI_2 + bA / (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$ est un corps.

□ **Exercice 20** Soit A l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de la forme

$f(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(kx),\ n \in \mathbf{N},\ a_i \in \mathbf{R}$.

1) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
2) Soit $f \in A$. Montrer que si $f = 0$, alors les coefficients a_k sont tous nuls.
3) En déduire que A est intègre.

□ **Exercice 21** Soit $\alpha \in \mathbf{Q}^{+*}$ tel que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbf{Q}$, et $\mathbf{Q}[\sqrt{\alpha}] = \{r + r'\sqrt{\alpha}\ ;\ (r,r') \in \mathbf{Q}^2\}$.
Montrer que $\mathbf{Q}[\sqrt{\alpha}]$ est un corps pour les lois usuelles .

E Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

□ **Exercice 22**

1) Vérifier que 429 et 700 sont premiers entre eux.
2) Déterminer tous les couples $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que : $700\,u + 429\,v = 1$.

□ **Exercice 23** Soit $n \in \mathbf{N}$. déterminer le pgcd de $5^n + 6^n$ et $5^{n+1} + 6^{n+1}$.

□ **Exercice 24** Calculer 10^k modulo 7 et en déduire $\sum\limits_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5\ (7)$.

□ **Exercice 25** Quel est le reste de la division euclidienne de 2792^{217} par 5 ?

□ **Exercice 26** Calculer le reste modulo 41 de l'entier $51200^{2^{100}}$, le reste modulo 17 de 1035125^{5642}

□ **Exercice 27** Quel est le reste de la division euclidienne de 51200^{100} par 41 ?
Même question avec 1986^{10000} et 31 , puis 1035125^{5642} et 17.

□ **Exercice 28** Montrer que : $\forall\,(a, b) \in (\mathbf{Z}^\star)^2\ ,\ a^2 \mid b^2 \implies a \mid b$.

F Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$

□ **Exercice 29** Résoudre dans $\mathbf{Z}/20\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/20\mathbf{Z}$ le système : $\begin{cases} \bar{4}x + \bar{5}y = \overline{13} \\ \bar{2}x + \bar{3}y = \overline{11} \end{cases}$

□ **Exercice 30** Résoudre dans $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$: $\begin{cases} \bar{3}x + \bar{7}y = \bar{3} \\ \bar{6}x - \bar{4}y = \bar{0} \end{cases}$

□ **Exercice 31** Résoudre dans $\mathbf{Z}/37\mathbf{Z}$: $x^2 - \overline{31}x + \overline{18} = 0$.

□ **Exercice 32** Résoudre dans $\mathbf{Z}/35\mathbf{Z}$: $x^2 - \overline{31}x + \overline{18} = 0$.

□ **Exercice 33** On considère $(\mathbf{Z}/20\mathbf{Z})^\star$, l'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication dans l'anneau $((\mathbf{Z}/20\mathbf{Z}), +, \times)$. Déterminer ses éléments et le reconnaître comme isomorphe à un groupe produit simple.

2 Exercices plus élaborés

A Groupes : généralités

□ **Exercice 34** Soient $(G, .)$ un groupe , H et K deux sous-groupes de G .

On note $HK = \{h.k/(h, k) \in H \times K\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) HK est un sous-groupe de G , ii) $HK \subset KH$

iii) KH est un sous-groupe de G , iv) $KH \subset HK$

□ **Exercice 35** Sur $G = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, on définit la loi de composition interne $\star$ par :

$$\forall\,(a, b), (a', b') \in \mathbf{R}^\star \times \mathbf{R}\ ,\ (a, b) \star (a', b') = (aa', ba' + b')$$

Montrer que $(G, \ast)$ est isomorphe au groupe des transformations affines de la droite réelle (muni de la loi $\circ$). Montrer que $(G, \ast)$ est un groupe non abélien .

Chercher les sous-groupes abéliens de G.

□ **Exercice 36**

Démontrer qu'un sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique. Que dire de son ordre ?

□ **Exercice 37**

Soit $(G,*)$ un groupe fini et χ un morphisme de $(G,*)$ dans $(\mathbf{C}^*,\times)$. Montrer que

$$\sum_{g\in G}\chi(g)=\begin{cases}0 & \text{si } \chi \text{ n'est pas constante}\\ \mathrm{Card}(G) & \text{sinon}\end{cases}$$

B Ordre d'un élément d'un groupe

□ **Exercice 38** Soit $(G,.)$ un groupe **abélien** fini.

1) Soient $x,y\in G$. Soient m et n les ordres respectifs de x et y. On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre mn.
2) On appelle **exposant** de $(G,.)$ le plus grand des ordres de ses éléments.

   Montrer que l'ordre de chaque élément de G divise l'exposant de $(G,.)$.
3) Soit p un nombre premier. Montrer que le groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est cyclique.
4) Montrer que l'exposant de $(G,.)$ et le cardinal de G ont mêmes facteurs premiers.

C Groupes de permutations

□ **Exercice 39** Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$. On note $f(n)$ le plus grand des ordres des éléments de $\mathfrak{S}_n$.

1) Montrer que $f(n)=\max\{\mathrm{ppcm}(a_1,\dots,a_k),\ k\in\mathbf{N}^*,\ a_1,\dots,a_k\in\mathbf{N}^*,\ a_1+\dots+a_k=n\}$.
2) Montrer que pour tous $k,a_1,\dots,a_k\in\mathbf{N}^*$, on a :

$$\prod_{i=1}^{k}a_i\leqslant \mathrm{ppcm}(a_1,\dots,a_k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}\mathrm{pgcd}(a_i,a_j)$$

3) Soit $p\in\mathbf{N}^*$. Montrer que $n^p=\underset{n\to\infty}{O}(f(n))$.

□ **Exercice 40** Soit $n\geqslant 3$. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Soit $a\neq b$ dans $[\![1,n]\!]$.

1) Simplifier $\sigma\circ(a,b)\circ\sigma^{-1}$.
2) Déterminer l'ensemble des permutations qui commutent avec (a,b).
3) Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire les permutations $\mathfrak{S}_n$ qui commutent avec toutes les autres.

□ **Exercice 41**

1) Montrer que pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ et tout cycle $\gamma=(a_1,\dots,a_p)$ on a $\sigma\circ\gamma\circ\sigma^{-1}=(\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_p))$.
2) Vérifier que : $(2,5)=(4,5)\circ(2,4)\circ(4,5)$, puis que $(2,5)=(4,5)\circ(3,4)\circ(2,3)\circ(3,4)\circ(4,5)$.
3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   En généralisant ce procédé, démontrer que la partie $B=\{(i,i+1)/1\leqslant i<n\}$ est génératrice du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

4) Démontrer que cette partie génératrice est minimale (c'est-à-dire qu'aucune de ses sous-parties strictes n'est génératrice). (On démontrera que $n-2$ transpositions appartenant à B n'engendrent pas $\mathfrak{S}_n$)
5) Démontrer que la transposition $\tau = (1,2)$ et le cycle $\gamma = (1,2,\dots,n)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.
6) $\{\tau,\gamma\}$ est-elle une partie génératrice minimale de $\mathfrak{S}_n$?

D Anneaux : généralités

□ Exercice 42

1) Montrer que l'ensemble $E = \{x + y\sqrt{2} / (x,y) \in \mathbf{Z}^2\}$, muni de l'addition et de la multiplication des réels, est un anneau.
2) Déterminer l'ensemble U des éléments inversibles de E (on utilisera l'application N qui à $z = x + y\sqrt{2} \in E$ associe $N(z) = x^2 - 2y^2$).

□ Exercice 43 Déterminer les automorphismes du corps $\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\sqrt{2}$.

□ Exercice 44 Montrer que

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{pmatrix} ; (x,y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

est un corps isomorphe à $\mathbf{C}$.

□ Exercice 45 Soit A un anneau intègre et fini, non réduit à $\{0\}$, et soit a un élément non nul de A. Montrer que l'application de A vers A définie par : $x \mapsto ax$ est bijective. En déduire que A est un corps.

□ Exercice 46 Soit A un anneau et $x \in A$. Il est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

1) Montrer que si xy est nilpotent alors yx l'est aussi.
2) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent , alors $x+y$ et xy sont nilpotents.
3) Montrer que si A est commutatif , l'ensemble N des éléments nilpotents est un idéal de A.
4) Montrer que : x nilpotent $\Longrightarrow$ $(1-x)$ est inversible (et calculer son inverse).

□ Exercice 47

1) Démontrer l'identité $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.
2) Montrer que $j : \mathbf{Q}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $j : (a,b,c) \mapsto a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ est injective
3) Montrer que $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \; ; \; (a,b,c) \in \mathbf{Q}^3\}$ est un sous-corps de $\mathbf{R}$.

□ Exercice 48 Soit $a \in \mathbf{C}$. On pose

$$\mathbf{Q}[a] = \{P(a),\ P \in \mathbf{Q}[X]\} \qquad I(a) = \{P \in \mathbf{Q}[X],\ P(a) = 0\}$$

On dit que a est **algébrique** si et seulement si il existe $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(a) = 0$.

1) Montrer que si a est algébrique, alors :
   - Il existe un polynôme $M \in \mathbf{Q}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbf{Q}$ tel que $I(a) = M\mathbf{Q}[X]$.
   - $\mathbf{Q}[a]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.
   - $\mathbf{Q}[a]$ est un corps
2) Montrer que si $\mathbf{Q}[a]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, alors a est algébrique.
3) Soient $a, b \in \mathbf{C}$ des nombres algébriques. Montrer que la famille $(a^p b^q)_{p,q \in \mathbf{N}}$ est de rang fini. En déduire que ab et $a+b$ sont algébriques.
4) Que dire de l'ensemble des nombres algébriques ?
5) Déterminer $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.

E Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

□ **Exercice 49** Pour quels entiers n a-t-on $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 \equiv 0 \bmod (512)$?

□ **Exercice 50** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $11(x \wedge y) + (x \vee y) = 203$.

□ **Exercice 51** Montrer que pour tout n entier relatif, $n^7 - n$ est divisible par 42.

□ **Exercice 52** Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $2x + 5y - 11z = 1$.

□ **Exercice 53**

1) Montrer que si x et y sont premiers entre eux, il en est de même de $x + y$ et xy.
2) Etudier la réciproque.
3) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$

□ **Exercice 54** Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$. Montrer que $(a^b - 1)(a^c - 1)$ divise $(a - 1)(a^{bc} - 1)$.

□ **Exercice 55** On pose, pour $n \in \mathbb{N}, F_n = 2^{2^n} + 1$.

1) Montrer que si m et n sont deux entiers distincts, alors F_n et F_m sont premiers entre eux.
2) Montrer que F_n divise $2^{F_n} - 2$.

□ **Exercice 56** Soient $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, deux entiers naturels m et n tels que $m > n$.

Montrer que : $\text{pgcd}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{pgcd}(m,n)} - 1$.

F Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$

□ **Exercice 57** Déterminer les entiers relatifs x vérifiant simultanément :

$$3x - 10 \in 7\mathbb{Z} \quad , \quad 11x + 8 \in 17\mathbb{Z} \quad , \quad 16x - 1 \in 5\mathbb{Z}$$

□ **Exercice 58** Résoudre l'équation $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/105\mathbb{Z}$.

□ **Exercice 59** Étude de $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$.

1) Déterminer les éléments et le cardinal de $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$.
2) Pour tout entier a dans $\mathbb{Z}$ tel que $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$ et tout $n \geq 3$, calculer $a^{2^{n-2}}$ modulo2^n.

   On pourra procéder par récurrence.
3) Le groupe $\left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\right)^*$ est-il cyclique ?

□ **Exercice 60** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, et $d \in \mathbb{N}$ tel que $d|n$.
Déterminer les sous-groupes d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

□ **Exercice 61** Soit p un nombre premier.

1) Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
2) Soit k un entier naturel. Déterminer la classe de $k^{p(p-1)}$ modulo p^2.

   On pourra utiliser le théorème d'Euler.

□ **Exercice 62** Soit p un nombre premier impair.

1) Que dire de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
2) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{k}$ la classe de k dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   Démontrer que $\bar{1}^{-1} + \bar{2}^{-1} + \ldots + (\overline{p-1})^{-1} = \bar{0}$.

3) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrer que $p | \binom{p}{k}$.

   On note $x_k = \frac{1}{p}\binom{p}{k}$. Montrer que $\bar{x}_k = (-\bar{1})^{k-1}\bar{k}^{-1}$.

4) On pose $m = \frac{2^{p-1}-1}{p}$. En vertu du petit théorème de Fermat, m est un entier.

   Démontrer que $\bar{m} = (\bar{1})^{-1} + \bar{3}^{-1} + \bar{5}^{-1} + \ldots + (\overline{p-2})^{-1}$.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ Exercice 63

Soit G un groupe multiplicatif fini d'ordre n. Soit H un sous-groupe de G d'ordre p.

1) Montrer que pour tout $a, b \in G^2$, $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \varnothing$.
2) Montrer que p divise n.
3) Supposons que $n = pq$ avec $p < q$, et q premier.

   Montrer (par l'absurde),qu'il existe au plus un sous-groupe d'ordre q.
4) Si $n = 9$, montrer qu'il existe au moins un sous-groupe de G d'ordre 3.

   Montrer qu'il en existe 1 ou 4.

□ Exercice 64 (Les $p-$ groupes de Prüfer)

Soit $p > 1$ un entier premier. Soit $m \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathbf{U}_m$ est le groupe des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Soit $G_p = \left\{z \in \mathbf{C}\ ,\ \exists k \in \mathbf{N}\ ,\ z^{(p^k)} = 1\right\}$.

1) Montrer que G_p est un groupe multiplicatif.
2) Montrer que tous les sous-groupes de G_p sont cycliques, à l'exclusion de G_p, et qu'aucun d'entre eux n'est maximal au sens de l'inclusion.

   On pourra considérer la famille des $(U_{p^k})_{k \in \mathbf{N}}$.
3) Montrer que G_p n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments.

Table des matières