

**Exercice** (Intégrale de Poisson)

On pose, pour  $x$  réel,  $I(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt$ .

1. Justifier la définition de  $I(x)$  et établir, pour  $x$  non nul,  $I\left(\frac{1}{x}\right) = I(x) - 2\pi \ln|x|$ .
2. Montrer que la fonction  $I$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$  et préciser  $I'$  sur cet intervalle. On pourra dans le calcul de  $I'$  poser  $u = \tan \frac{t}{2}$ .
3. En déduire la valeur de  $I(x)$ , pour tout réel  $x$ .

**Correction**

1. Soit  $t \in [0, \pi]$  on étudie les zéros du trinôme  $1 - 2x \cos(t) + x^2$ . On a  $\Delta = 4 \cos^2(t) - 4 = -4 \sin^2(t) \leq 0$ . Les racines sont donc  $e^{it}$  et  $e^{-it}$ .

En particulier, si  $t \notin \{0, \pi\}$ ,  $\Delta < 0$  et, pour tout  $x$  réel,  $1 - 2x \cos(t) + x^2 > 0$ . À l'inverse pour  $t = 0$ ,  $x = 1$  est racine double alors que pour  $t = \pi$ , c'est  $x = -1$  qui est racine double.

En conclusion :

- Si  $x \notin \{-1, 1\}$ , la fonction  $t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2)$  est continue sur  $[0, \pi]$  et donc  $I(x)$  est bien définie.
- Si  $x = 1$ , la fonction  $t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) = \ln(2 - 2 \cos(t))$  est continue sur  $]0, \pi]$ . Au voisinage de  $0^+$ ,

$$\ln(2 - 2 \cos(t)) = \ln(2) + \ln\left(\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = 2 \ln(t) + \ln(1 + o(1)) \sim 2 \ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Comme  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ ,  $t \mapsto \ln(2 - 2 \cos(t))$  aussi.

- Si  $x = -1$ , la fonction  $t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) = \ln(2 + 2 \cos(t))$  est continue sur  $[0, \pi[$ . On étudie la fonction au voisinage de  $\pi^-$ . On pose  $t = \pi - u$  et on se ramène à  $u \mapsto \ln(2 + 2 \cos(\pi - u)) = \ln(2 - 2 \cos(u))$  quand  $u \rightarrow 0^+$ . On est ramené au cas précédent.

La fonction  $I$  est définie sur  $\mathbf{R}$ .

De plus, pour  $x \neq 0$ ,

$$I\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\pi \ln\left(1 - \frac{2}{x} \cos(t) + \frac{1}{x^2}\right) dt = \int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) dt + I(x) = I(x) - 2\pi \ln|x|$$

2. On applique le théorème de caractère  $\mathcal{C}^1$  des intégrales à paramètres. On pose  $f : (x, t) \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2)$ 
  - On vient de voir que pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable.
  - Pour tout  $t \in [0, \pi]$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \forall t \in [0, \pi], \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2x - 2 \cos(t)}{1 - 2x \cos(t) + x^2}$$

- Domination : Soit  $a \in [0, 1[$ , on procède à une domination sur  $[-a, a]$ , la fonction  $(x, t) \mapsto 1 - 2x \cos(t) + x^2$  ne s'annule pas sur  $[-a, a] \times [0, \pi]$ . Comme  $[-a, a] \times [0, \pi]$  est un compact

(comme produit de compacts), d'après le théorème des bornes atteintes appliqué à la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  qui est continue, on peut poser  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $(x, t) \in [-a, a] \times [0, \pi]$ ,

$$\left| \frac{2x - 2\cos(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2} \right| \leq \alpha$$

La fonction  $t \mapsto \alpha$  est intégrable sur  $[0, \pi]$ .

On en déduit que  $I$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$  et que

$$\forall x \in ] -1, 1[, I'(x) = 2 \int_0^\pi \frac{x - \cos(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2} dt$$

On pose  $u = \tan \frac{t}{2}$ . La fonction  $t \mapsto \tan \frac{t}{2}$  est  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante et réalise une bijection de  $]0, \pi[$  sur  $]0, +\infty[$ . De plus

$$\cos(t) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \text{ et } du = \frac{1}{2} (1 + u^2) dt$$

On en déduit que

$$I'(x) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{x - \frac{1 - u^2}{1 + u^2}}{1 - 2x \frac{1 - u^2}{1 + u^2} + x^2} \frac{1}{1 + u^2} du = 4 \int_0^{+\infty} \frac{(x - 1) + (x + 1)u^2}{(1 + u^2)((x - 1)^2 + (x + 1)^2 u^2)} du$$

On étudie la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{(x - 1) + (x + 1)X}{(1 + X)((x - 1)^2 + X(x + 1)^2)}$$

On suppose que  $x \neq 0$  pour que  $-\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \neq -1$ . On a alors

$$F(X) = \frac{a}{1 + X} + \frac{b}{(x - 1)^2 + X(x + 1)^2}$$

où

$$a = \frac{1}{2x} \text{ et } b = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

On en déduit que

$$I'(x) = \frac{2}{x} \left[ \int_0^\infty \frac{1}{1 + u^2} du + \int_0^\infty \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2 + (x + 1)^2 u^2} du \right]$$

D'où

$$I'(x) = \frac{2}{x} \left( \frac{\pi}{2} + [\arctan(u(x + 1)/(x - 1))]_0^\infty \right) = 0$$

La fonction  $I$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $I'$  est continue et donc  $I'(0) = 0$ .

3. La fonction est constante sur  $] -1, 1[$  donc pour  $x \in ] -1, 1[$ ,  $I(x) = I(0) = 0$ .

En utilisant la formule obtenue à la question 1, on obtient que si  $x \in ] -\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ ,

$$I(x) = I(1/x) + 2\pi \ln |x| = 2\pi \ln |x|$$

Afin de conclure l'étude, il faut montrer que  $I$  est continue en 1 par exemple. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres sur  $[0, +\infty[$ .

- Pour tout  $t \in ]0, \pi]$ ,  $x \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2)$  est continue.
- Domination. Soit  $a \geq 2$ . On étudie, à  $t$  fixé, les variations de  $\rho : x \mapsto 1 - 2x \cos t + x^2$ . La dérivée est  $-2 \cos t + 2x$ . On en déduit que la fonction est décroissante sur  $[0, \cos t]$  et croissante sur  $[\cos t, a]$ .

|            |   |            |           |
|------------|---|------------|-----------|
| $x$        | 0 | $\cos(t)$  | $a$       |
| $\rho'(x)$ |   | - 0 +      |           |
| $\rho(x)$  | 1 | $\sin^2 t$ | $\rho(a)$ |

Comme  $\rho(a) \geq 1$ , on peut noter  $b \in [\cos t, a]$  la valeur telle que  $\rho(b) = 1$ . en composant par  $\ln$  et par la valeur absolue :

|                  |   |                  |     |                |
|------------------|---|------------------|-----|----------------|
| $x$              | 0 | $\cos(t)$        | $b$ | $a$            |
| $ \ln(\rho(x)) $ | 0 | $-2 \ln(\sin t)$ | 0   | $\ln(\rho(a))$ |

On en déduit que

$$|\ln(1 - 2x \cos t + x^2)| \leq \max(-2 \ln(\sin t), \ln(1 - 2a \cos t + a^2)) \leq -2 \ln(\sin t) + \ln(1 - 2a \cos t + a^2)$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto -2 \ln(\sin t) + \ln(1 - 2a \cos t + a^2)$  est intégrable sur  $]0, \pi]$  car  $t \mapsto \ln(1 - 2a \cos t + a^2)$  est prolongeable par continuité et  $\ln(\sin t) \sim_{t \rightarrow 0} \ln(t)$  en procédant comme à la question 1.

On en déduit que  $I(1) = I(-1) = 0$ .