Préliminaires

1) Soit $A \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} AU = U & \iff \forall i \in [\![1 \,;\, N]\!], (AU)[i] = U[i] \\ & \iff \forall i \in [\![1 \,;\, N]\!], \sum_{j=1}^{N} A[i,j]U[j] = U[i] \\ & \iff \forall i \in [\![1 \,;\, N]\!], \sum_{j=1}^{N} A[i,j] = 1 \\ & \iff A \text{ vérifie } (M_2) \end{aligned}$$

Soit A et B deux noyaux de Markov.

— Pour tout $(i,j) \in [\![1 \,;\, N]\!]^2$, $(AB)[i,j] = \sum_{k=1}^{N} A[i,k]B[k,j] \geqslant 0$ (car $\mathbb{R}_+$ est stable par somme et produit).

— On suppose que A et B vérifient (M_2). On a alors, par associativité, $(AB)U = A(BU) = AU = U$. Cela montre que AB vérifie (M_2).

On a bien montré que si A et B sont deux noyaux de Markov alors AB est encore un noyau de Markov.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov.

— $\boxed{\text{I}}$: Pour $n = 0$, $K^0 = I_N$ est un noyau de Markov de manière évidente.

— $\boxed{\text{H}}$: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que K^n est un noyau de Markov. D'après 1. $K^{n+1} = K.K^n$ est encore un noyau de Markov

— $\boxed{\text{C}}$: Par le principe de récurrence, pour tout entier n, K^n est un noyau de Markov.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

On voit alors que par continuité du produit matriciel

$$H_t U = e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^n \right) U = e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^n U \right) = e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} U \right) = U$$

Cela montre que H_t vérifie (M_2).

De plus, H_t vérifie (M_1) car pour tout $(i,j) \in [\![1 \,;\, N]\!]^2$,

$$H_t[i,j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^n[i,j] \geqslant 0$$

Soit $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$. Comme tH et sH commutent,

$$H_{t+s} = e^{-(t+s)} \exp((t+s)H) = e^{-t} e^{-s} \exp(tH) \exp(sH) = H_t H_s$$

3) L'endomorphisme u étant un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.

De plus, d'après l'hypothèse, u est un endomorphisme positif. On en déduit que ses valeurs propres sont positives.

4) Notons $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N$ les valeurs propres de u.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_N)$ une base orthonormée de E de telle sorte que pour tout $i \in [\![1\,;\, N]\!]$, e_i soit un vecteur propre pour la valeur propre λ_i. Une telle base existe d'après le théorème spectral.
Soit $x \in E$, on peut décomposer x dans la base $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$.
Avec les notations de l'énoncé, $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_1)$ d'où $p(u) = \alpha_1 e_1$. On considère donc

$$y = x - p(x) = \sum_{i=2}^{N} \alpha_i e_i$$

On a alors

$$q_u(y) = (u(y)|y) = \left(\sum_{i=2}^{N} \alpha_i \lambda_i e_i \mid \sum_{j=2}^{N} \alpha_j e_j \right) = \sum_{i=2}^{N} \lambda_i \alpha_i^2$$

La dernière égalité venant du fait que la base $\mathscr{B}$ est orthonormée. La suite des valeurs propres étant croissante,

$$q_u(y) = \sum_{i=2}^{N} \lambda_i \alpha_i^2 \leqslant \lambda_2 \sum_{i=2}^{N} \alpha_i^2 = \lambda_2 \|y\|^2$$

Là encore, la dernière égalité vient du faire que la base $\mathscr{B}$ est orthonormée.

Partie 2 - Convergence de H_t

5) Soit $i \in [\![1\,;\, N]\!]$,

$$(\pi K)[i] = \sum_{j=1}^{N} \pi[j] K[j,i] = \sum_{j=1}^{N} K[i,j] \pi[i] = \pi[i]$$

La dernière égalité venant du fait que K étant un noyau de Markov il vérifie (M_2).

6) Vérifions les axiomes d'un produit scalaire.
   — Soit $X, Y \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{N} X[i] Y[i] \pi[i] = \langle Y, X \rangle$$

   — Soit $X \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, soit $Y_1, Y_2 \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})^2$, soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \langle X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \rangle &= \sum_{i=1}^{N} X[i](\lambda_1 Y_1[i] + \lambda_2 Y_2[i]) \pi[i] \\ &= \lambda_1 \sum_{n=1}^{N} X[i] Y_1[i] \pi[i] + \lambda_2 \sum_{n=1}^{N} X[i] Y_2[i] \pi[i] \\ &= \lambda_1 \langle X, Y_1 \rangle + \lambda_2 \langle X, Y_2 \rangle \end{aligned}$$

   Cela montre que $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ est linéaire à droite. Elle est donc bilinéaire par symétrie.
   — Soit $X \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, X \rangle = \sum_{n=1}^{N} X[i]^2 \pi[i] \geqslant 0$$

   L'inégalité vient du fait que pour tout $i \in [\![1\,;\, N]\!]$, $\pi[i] \geqslant 0$.
   — Soit $X \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tel que $\langle X, X \rangle = \sum\limits_{n=1}^{N} X[i]^2 \pi[i] = 0$. Pour qu'une somme de nombres positifs soit nul il faut qu'ils soient tous nuls. On a donc que pour tout $i \in [\![1\,;\, N]\!]$, $X[i]^2 \pi[i] = 0$ ce qui implique $X[i] = 0$ car $\pi[i] \neq 0$ par hypothèses. Finalement $X = 0$.

7) On sait que pour $X \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in \mathrm{Ker}(u) \iff (I_N - K)X = 0 \iff KX = X \iff X \in E_1(K)$$

où $E_1(K)$ est l'espace propre associé à la valeur propre 1 de l'endomorphisme $X \mapsto KX$. Cet espace propre contient U car K est un noyau de Markov or il est de dimension 1 donc

$$\mathrm{Ker}(u) = E_1(K) = \mathrm{Vect}(U)$$

Soit $(X, Y) \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle u(X), Y\rangle = \langle X - KX, Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \langle KX, Y\rangle$$

Or

$$\begin{aligned}
\langle KX, Y\rangle &= \sum_{i=1}^{N}(KX)[i]Y[i]\pi[i] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K[i,j]X[j]Y[i]\pi[i] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K[j,j]X[j]Y[i]\pi[j] \text{ car } K \text{ est } \pi\text{-réversible} \\
&= \sum_{j=1}^{N}(KY)[j]X[j]\pi[j] \\
&= \langle X, KY\rangle
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\langle u(X), Y\rangle = \langle X - KX, Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \langle KX, Y\rangle = \langle Y, X\rangle - \langle KY, X\rangle = \langle u(Y), X\rangle$$

L'endomorphisme u est bien autoadjoint

8) Soit $X \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbb{R})$.

$$q_u(X) = \langle (I-K)X, X\rangle = \langle X, X\rangle - \langle KX, X\rangle = \sum_{i=1}^{N} X[i]^2\pi[i] - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} K[i,j]X[j]X[i]\pi[i]$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(X[i]-X[j])^2K[i,j]\pi[i] &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} X[i]^2\pi[i]\sum_{j=1}^{N} K[i,j] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X[i]X[j]K[i,j]\pi[i] \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} X[j]^2 \sum_{i=1}^{N} K[i,j]\pi[i]
\end{aligned}$$

Or, en utilisant que K est π-réversible,

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} X[j]^2\sum_{i=1}^{N} K[i,j]\pi[i] = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} X[j]^2\pi[j]\sum_{i=1}^{N} K[j,i] = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} X[j]^2\pi[j]$$

En regroupant les termes, on a l'égalité cherchée.

En appliquant la question 3, on obtient que les valeurs propres sont positives.

9) La fonction $\theta : t \mapsto \exp(tK)$ est dérivable et $\theta' : t \mapsto K\exp(tK)$. On en déduit que $\alpha : t \mapsto H_t$ est dérivable de dérivée $\alpha' : t \mapsto -H_t + KH_t$.
L'application $L_X : \mathscr{M}_N(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ étant linéaire, la fonction $\psi_X = L_X \circ \alpha$ est dérivable et

$$\psi'_X : t \mapsto L_X \circ \alpha'(t) = -(I_N - K)H_tX$$

10) Par définition, $\varphi_X(t) = \langle H_tX, H_tX\rangle = \langle \psi_X(t), \psi_X(t)\rangle$. Comme le produit scalaire est bilinéaire, φ_X est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'_X(t) = \langle \psi'_X(t), \psi_X(t)\rangle + \langle \psi_X(t), \psi'_X(t)\rangle = 2\langle -(I_N - K)H_tX, H_tX\rangle = -2q_u(H_tX)$$

11) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On a admis que $X \mapsto H_tX$ est un endomorphisme autoadjoint de $\mathscr{M}_{1,N}(\mathbb{R})$. On sait que U est un vecteur propre pour la valeur propre 1 de H_t d'après la question 2. On peut donc construire une base orthogonale de vecteurs propres $(U, V_2, \ldots, V_N)$. Cela montre que $F = (\mathrm{Vect}(U))^\perp = \mathrm{Vect}(V_2, \ldots, V_N)$ est stable par H_t.
On pose $Y = X - p(X) \in F$. On en déduit que $H_tY = H_t(X - p(X)) = H_tX - p(X) \in F$. On a utilisé que $H_t(p(X)) = p(X)$ car $p(X) \in \mathrm{Vect}(U)$. Cela montre que $p(H_tX) = p(X)$.

12) Soit $X \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbb{R})$, on pose $Y = X - p(X)$. On note λ la plus petite valeur propre non nulle de u. Soit $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\varphi'_Y(t) = -2q_u(H_tY) = -2q_u(H_t(X - p(X))) = -2q_u(H_tX - p(X)) = -2q_u(H_tX - p(H_tX))$$

D'après la question 7, u admet 0 comme valeur propre simple. Donc, en utilisant la question 7.

$$\varphi'_Y(t) \leqslant -2\|H_tX - p(H_tX)\|^2 = -2\|H_tY\|^2 = -2\lambda\varphi_Y(t)$$

On regarde la fonction

$$\theta : t \mapsto e^{2\lambda t}\varphi_Y(t)$$

Elle est dérivable et sa dérivée vérifie

$$\theta'(t) = 2\lambda e^{2\lambda t}\varphi_Y(t) + e^{2\lambda t}\varphi'_Y(t) = e^{-\lambda t}\left(2\lambda\varphi_Y(t) + \varphi'_Y(t)\right) \leqslant 0$$

La fonction étant décroissante, pour $t \geqslant 0$,

$$\theta(t) \leqslant \theta(0) = \varphi_Y(0) = \|H_0Y\|^2 = \|Y\|^2 = \|X - p(X)\|^2$$

Finalement, en multipliant par $e^{-2\lambda t}$

$$\|H_tX - p(X)\|^2 = \|H_t(X - p(X))\|^2 = \varphi_Y(t) \leqslant e^{-2\lambda t}\|X - p(X)\|^2$$

13) On applique les résultats de la question précédente au vecteur $X = E_i$. On sait que U est un vecteur normé de E donc $p(E_i) = \langle E_i, U\rangle U = \pi[i]U$. De plus,

$$\|E_i - p(E_i)\|^2 = \|E_i\|^2 - 2\langle E_i, \pi[i]U\rangle + \pi[i]^2\|U\|^2 = \pi[i] - 2\pi[i]^2 + \pi[i]^2 = \pi[i] - \pi[i]^2$$

La question précédente donne alors que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|H_tE_i - \pi[i]U\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\|E_i - p(E_i)\|^2 = e^{-2\lambda t}(\pi[i] - \pi[i]^2) \leqslant e^{-2\lambda t}\pi[i]$$

En prenant la racine carrée,

$$\|H_tE_i - \pi[i]U\| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]}$$

14) Soit $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]$.

Notons $A = \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k]H_{t/2}[k,j]$, $B = \sum_{k=1}^{N} \pi[k]H_{t/2}[k,j]$, $C = \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k]\pi[j]$ et $D = \sum_{k=1}^{N} \pi[k]\pi[j]$ de sorte que

$$\sum_{k=1}^{N}(H_{t/2}[i,k]-\pi[k])(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]) = A-B-C+D$$

D'après la question 2,

$$A = \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k]H_{t/2}[k,j] = H_{t/2+t/2}[i,j] = H_t[i,j]$$

Comme $H_{t/2}$ est un noyau de Markov,

$$C = \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k]\pi[j] = \pi[j]$$

Comme π est une probabilité

$$D = \sum_{k=1}^{N} \pi[k]\pi[j] = \pi[j]$$

Pour calculer B on utilise que $H_{t/2}$ est un noyau de Markov π-réversible, on a alors

$$B = \sum_{k=1}^{N} \pi[k]H_{t/2}[k,j] = \sum_{k=1}^{N} \pi[j]H_{t/2}[j,k] = \pi[j]$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^{N}(H_{t/2}[i,k]-\pi[k])(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]) = H_t[i,j]-\pi[j]$$

15) Soit $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$. En utilisant que $H_{t/2}$ est π-réversible,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}(H_{t/2}[i,k]-\pi[k])(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]) &= \sum_{k=1}^{N}\left(H_{t/2}[k,i]\frac{\pi[k]}{\pi[i]}-\pi[k]\right)(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]) \\
&= \frac{1}{\pi[i]}\sum_{k=1}^{N}(H_{t/2}[k,i]-\pi[i])(H_{t/2}[k,j]-\pi[j])\pi[k] \\
&= \frac{1}{\pi[i]}\langle H_{t/2}E_i-\pi[i]U, H_{t/2}E_j-\pi[j]U\rangle
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis les résultats de la question 13

$$\begin{aligned}
|H_t[i,j]-\pi[j]| &\leqslant \frac{1}{\pi[i]}\|H_{t/2}E_i-\pi[i]U\| \times \|H_{t/2}E_j-\pi[j]U\| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi[i]}\sqrt{\pi[i]}e^{-\lambda t/2}\sqrt{\pi[j]}e^{-\lambda t/2} = e^{-\lambda t}\sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}
\end{aligned}$$