

Exercice I

$$1) \chi_A = (X - 1)(X - 3) + 1 = X^2 - 4X + 4 = \boxed{(X - 2)^2}.$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\boxed{0 = \chi_A(A) = (A - 2I_2)^2}$

Ainsi $B = A - 2I_2$ est nilpotente.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $tA = 2tI_2 + tB$ et comme $2tI_2$ et tB commutent, on a :

$$\exp(tA) = \exp(2tI_2) \exp(tB) = e^{2t} I_2 \exp(tB) = e^{2t} \exp(tB)$$

2) Posant $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel de l'énoncé s'écrit $X' = AX$ et la condition initiale s'écrit $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. L'unique solution de ce problème de Cauchy est donné par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \exp(tB) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} (I_2 + tB) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

car pour tout $n \geq 2$, $\frac{t^n B^n}{n!} = 0$ puisque $B^2 = 0$.

$$\text{Or } I_2 + tB = (1 - 2t)I_2 + tA = \begin{pmatrix} 1 - t & -t \\ t & 1 + t \end{pmatrix}.$$

Ainsi la solution recherchée est donnée par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x(t) &= e^{2t}((1 - t)1 + (-t)2) &= e^{2t}(1 - 3t) \\ y(t) &= e^{2t}(t \cdot 1 + (1 + t)2) &= e^{2t}(2 + 3t) \end{cases}}$$

Exercice II

1) Soit $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dérivable vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}_+, X'(t) = A(t)X(t)$.

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a \leq b$,

Notons $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La fonction $f : t \mapsto \|X(t)\|^2$ est dérivable de dérivée $t \mapsto 2(X'(t) | X(t))$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|f'(t)| \leq 2\|X'(t)\| \cdot \|X(t)\| = 2\|A(t)X(t)\| \cdot \|X(t)\| \leq 2\|A(t)\|_{\text{op}} f(t)$$

On a donc

$$-2\|A(t)\|_{\text{op}} f(t) \leq f'(t) \leq 2\|A(t)\|_{\text{op}} f(t)$$

Ainsi la fonction $g : t \mapsto f(t) \exp(-2 \int_a^t \|A(s)\|_{\text{op}} ds)$ vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) = \left(f'(t) - 2\|A(t)\|_{\text{op}} f(t) \right) \exp\left(-2 \int_a^t \|A(s)\|_{\text{op}} ds\right) \leq 0$$

Donc g décroît et ainsi $g(b) \leq g(a)$ c'est-à-dire

$$\|X(b)\|^2 \exp\left(-2 \int_a^b \|A(s)\|_{\text{op}} ds\right) \leq \|X(a)\|^2 \exp(0)$$

donc

$$\boxed{\|X(b)\| \leq \|X(a)\| \exp\left(\int_a^b \|A(s)\|_{\text{op}} ds\right)}$$

De même la fonction $h : t \mapsto f(t) \exp(+2 \int_a^t \|A(s)\|_{op} ds)$ est croissante donc $h(b) \geq h(a)$ d'où

$$\|X(b)\| \exp\left(\int_a^b \|A(s)\|_{op} ds\right) \geq \|X(a)\|$$

b) De la question précédente, en utilisant que $s \mapsto \|A(s)\|_{op}$ est intégrable, on déduit que

$$\forall t \geq 0 \quad \|X(t)\| \leq \|X(0)\| \exp\left(\int_0^{+\infty} \|A(s)\|_{op} ds\right)$$

Donc X est bornée.

c) La suite $(X(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée par la question précédente. Donc il existe une extractrice φ telle que la suite $(X(\varphi(p)))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \geq p_0, \|X(\varphi(p)) - \ell\| \leq \varepsilon/2$.

Soit $M > 0$ un majorant de $\|X\|$ sur \mathbb{R} .

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, comme X est de classe \mathcal{C}^1 on a par le théorème fondamental de l'analyse puis par inégalité triangulaire intégrale :

$$\|X(b) - X(a)\| = \left\| \int_a^b X'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|X'(t)\| dt \leq \int_a^b \|A(t)\|_{op} \|X(t)\| dt \leq M \int_a^b \|A(t)\|_{op} dt$$

Par ailleurs, comme

$$\int_t^{+\infty} \|A(s)\|_{op} ds = \int_0^{+\infty} \|A(s)\|_{op} ds - \int_t^{+\infty} \|A(s)\|_{op} ds \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \|A(s)\|_{op} ds - \int_0^{+\infty} \|A(s)\|_{op} ds = 0$$

il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \geq t_0 \quad \int_t^{+\infty} \|A(s)\|_{op} ds \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

Enfin comme $\varphi(p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ il existe $p_1 \geq p_0$ tel que $\varphi(p_1) \geq t_0$.

Pour $t \geq \varphi(p_1)$ on a donc

$$\begin{aligned} \|X(t) - \ell\| &\leq \|X(t) - X(\varphi(p_1))\| + \|X(\varphi(p_1)) - \ell\| \\ &\leq M \int_{\varphi(p_1)}^t \|A(s)\|_{op} ds + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq M \int_{\varphi(p_1)}^{+\infty} \|A(s)\|_{op} ds + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc X a pour limite ℓ en $+\infty$.

2) Notons F l'ensemble des solutions sur \mathbb{R}^+ de l'équation $X' = AX$. C'est d'après le théorème de Cauchy linéaire un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ car l'équation $X' = AX$ est résolue en X' , homogène et à "coefficient généralisé" A continu.

Notons u l'application de F vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à tout $X \in F$ associe $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$.

L'application u est linéaire par linéarité de la limite.

Soit $X \in \text{Ker}(u)$. Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après la question 1)a) on a pour tout $b \geq a$:

$$\|X(a)\| \leq \|X(b)\| \exp\left(\int_a^b \|A(s)\|_{op} ds\right)$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges quand b tend vers $+\infty$ il vient :

$$\|X(a)\| \leq 0 \cdot \exp\left(\int_a^{+\infty} \|A(s)\|_{op} ds\right) = 0$$

Ainsi $X = 0_F$. Donc u est injective.

Comme F et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ont même dimension finie n , on en déduit que u est un isomorphisme.