Exercice I

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - y \\ y' & = & x + 3y \end{array}\right.$$

1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
Justifier que pour tout réel t, $\exp(tA) = e^{2t}\exp(tB)$ puis donner l'expression de la matrice $\exp(tA)$.
2) En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 2 \end{array}\right.$

Exercice II

On note $\|.\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_{\text{op}}$ la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme précédente.
Soit $A : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue telle que $t \mapsto \|A(t)\|_{\text{op}}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1) Soit $X : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dérivable vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ X'(t) = A(t)X(t)$.
   a) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a \leqslant b$,
   $$\begin{array}{rcl} \|X(b)\| & \leqslant & \|X(a)\| \exp\left(\displaystyle\int_a^b \|A(s)\|_{\text{op}}\, ds\right) \\ \text{et } \|X(a)\| & \leqslant & \|X(b)\| \exp\left(\displaystyle\int_a^b \|A(s)\|_{\text{op}}\, ds\right) \end{array}$$
   b) Montrer que X est bornée.
   c) Montrer que X a une limite finie à l'infini.
   On pourra appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite $(X(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Montrer que l'application de l'ensemble F des solutions sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $X' = AX$ vers $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à tout $X \in F$ associe $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} X(t)$ est un isomorphisme.