

## Partie I : Calcul d'une intégrale

- 1) Soit  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ . Pour s'assurer que  $f$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ , il suffit de vérifier que le dénominateur  $1 + te^{i\theta}$  ne s'annule pas pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ . Or, si  $t > 0$ ,

$$te^{i\theta} + 1 = 0 \iff te^{i\theta} = -1 \iff t = 1 \text{ et } \theta = \pi [2\pi]$$

Ainsi  $f$  est bien définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .

— Au voisinage de  $0^+$ .

$$|f(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \in L^1(]0, 1]) \text{ car } 1 - x < 1$$

Par le théorème de comparaison des fonctions intégrables, l'application  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .

— Au voisinage de  $+\infty$ .

Comme  $e^{i\theta} \neq 0$  on a :

$$|f(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^{x-1}}{|te^{i\theta}|} = t^{x-2} = \frac{1}{t^{2-x}} \in L^1([1, +\infty[) \text{ car } 2 - x > 1$$

Par le théorème de comparaison des fonctions intégrables, l'application  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

Étant intégrable sur  $]0, 1]$  et  $[1, +\infty[$ , l'application  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  : d'où le résultat.

- 2) Nous allons utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Posons :

$$\forall (t, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[, \quad k(t, \theta) = f(t).$$

Alors :

— pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ , l'application  $\theta \mapsto k(t, \theta)$  est de classe  $C^1$  sur  $]-\pi, \pi[$  et on a :

$$\forall t \in ]0, +\infty[, \forall \theta \in ]-\pi, \pi[, \quad \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, \theta) = t^{x-1} \times \left( -\frac{ite^{i\theta}}{(1 + te^{i\theta})^2} \right) = -ie^{i\theta} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2};$$

— pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , l'application  $t \mapsto k(t, \theta)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  par la question précédente ;

— Domination. Pour tout  $\beta \in ]0, \pi[$ , et tout  $(t, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\beta, \beta[$  on a :

$$\left| 1 + te^{i\theta} \right|^2 = |1|^2 + 2\operatorname{Re}(te^{i\theta}) + \left| te^{i\theta} \right|^2 = 1 + 2t \cos(\theta) + t^2, \quad (1)$$

et la parité du cosinus, ainsi que sa décroissance sur  $[0, \beta]$ , permettent d'écrire :

$$\left| 1 + te^{i\theta} \right|^2 \geq 1 + 2t \cos(\beta) + t^2 = \left| 1 + te^{i\beta} \right|^2;$$

on en déduit, toujours pour tout  $(t, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\beta, \beta[$  :

$$\left| \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, \theta) \right| = \frac{t^x}{|1 + te^{i\theta}|^2} \leq \frac{t^x}{|1 + te^{i\beta}|^2}. \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

L'application  $\varphi : t \mapsto \frac{t^x}{|1 + te^{i\beta}|^2}$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .

De plus

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}} > 0, \quad \varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{x-2} = \frac{1}{t^{2-x}} > 0,$$

et comme  $x \in ]0, 1[$  on a :  $-x < 0 < 1$ , ainsi que :  $2 - x > 1$ . Les conditions d'intégrabilité des fonctions de Riemann au voisinage de 0 et  $+\infty$  assurent donc, par comparaison, l'intégrabilité de  $\varphi$  sur  $]0, +\infty[$ . L'hypothèse de domination est bien vérifiée.

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, d'une part l'application  $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, \theta)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , et d'autre part  $r$  est de classe  $C^1$  sur  $] - \pi, \pi[$ . De plus :

$$\forall \theta \in ]-\pi, \pi[, \quad r'(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, \theta) dt = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} dt.$$

3) Pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  on a :  $g(\theta) = e^{ix\theta} r(\theta)$ . Ainsi  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $] - \pi, \pi[$  en tant que produit de fonctions de classe  $C^1$ , et on a :

$$\forall \theta \in ]-\pi, \pi[, \quad g'(\theta) = ix e^{ix\theta} r(\theta) + e^{ix\theta} r'(\theta) = ie^{ix\theta} \left( xr(\theta) + \frac{1}{i} r'(\theta) \right).$$

Or, pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , on a par la question précédente :

$$xr(\theta) + \frac{1}{i} r'(\theta) = \int_0^{+\infty} \left( xt^{x-1} \cdot \frac{1}{1 + te^{i\theta}} + t^x \cdot \left( -\frac{e^{i\theta}}{(1 + te^{i\theta})^2} \right) \right) dt = \int_0^{+\infty} h'(t) dt,$$

donc :  $\forall \theta \in ]-\pi, \pi[, \quad g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t) dt.$

Comme  $x > 0$ , on a :  $\lim_{t \rightarrow 0} t^x = 0$ , et de plus :  $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + te^{i\theta}) = 1$ , donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0.$$

(Remarque : l'énoncé demande de calculer  $h(0)$  alors que  $h$  a été définie sur  $]0, +\infty[$ ...)

Ensuite, comme  $x - 1 < 0$  :

$$|h(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{x-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} |h(t)| = 0$ . On en déduit :

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t) dt = ie^{ix\theta} [h(t)]_0^{+\infty} = 0$$

La fonction  $g$  est donc de dérivée nulle sur l'intervalle  $] - \pi, \pi[$  : on en déduit que c'est une fonction constante, d'où le résultat.

4) Soit  $\theta \in ]0, \pi[$ . Comme  $g$  est constante sur  $] - \pi, \pi[$ , on a :  $g(\theta) = g(-\theta)$ , donc par la formule d'Euler :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \frac{1}{2i} \left( g(\theta) e^{ix\theta} - g(\theta) e^{-ix\theta} \right) = \frac{1}{2i} \left( g(-\theta) e^{ix\theta} - g(\theta) e^{-ix\theta} \right).$$

Or par définition de  $g$  on a :

$$g(-\theta) e^{ix\theta} - g(\theta) e^{-ix\theta} = \int_0^{+\infty} \left( \frac{t^{x-1}}{1 + te^{-i\theta}} - \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^x (e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{|1 + te^{i\theta}|^2} dt.$$

Toujours par la formule d'Euler, on a :  $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta)$ . Par l'identité remarquable (1) démontrée à la question 2, on a donc :

$$g(-\theta) e^{ix\theta} - g(\theta) e^{-ix\theta} = 2i \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2 + 2t \cos(\theta) + 1} dt,$$

d'où le résultat :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2 + 2t \cos(\theta) + 1} dt.$$

5) Soit  $\theta \in ]0, \pi[$ . On a :

$$\forall t \in ]0, +\infty[, \quad t^2 + 2t \cos(\theta) + 1 = (t + \cos(\theta))^2 + 1 - (\cos(\theta))^2 = (t + \cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2$$

Comme  $\sin(\theta) \neq 0$  on peut écrire, par la question précédente :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{\left(\frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2 + 1} dt.$$

Faisons alors le changement de variable affine  $u = \frac{t + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ . Il en résulte le résultat voulu :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} \int_{\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}^{+\infty} \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{u^2 + 1} \sin(\theta) du = \int_{\cotan(\theta)}^{+\infty} \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2} du.$$

6) On veut appliquer le théorème de convergence dominée. Il faut faire attention au fait que l'intervalle d'intégration dépend du paramètre  $\theta$ . Posons donc :

$$\forall (\theta, u) \in ]0, \pi[ \times \mathbb{R}, \quad \gamma(u, \theta) = \begin{cases} \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2} & \text{si } u \geq \cotan(\theta), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(u, \theta) du.$$

Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée à paramètre continu :

- pour tout  $\theta \in ]0, \pi[$ , l'application  $u \mapsto \gamma(u, \theta)$  est continue (par morceaux) sur  $\mathbb{R}$ ;
- Soit  $u \in \mathbb{R}$ . Pour  $\theta$  au voisinage de  $\pi^-$ ,  $u \geq \cotan(\theta)$  car  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cotan(x) = -\infty$ . On a donc

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \gamma(u, \theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2} = \frac{1}{1 + u^2},$$

- Domination. Soit  $(\theta, u) \in ]0, \pi[ \times \mathbb{R}$ .

Si  $u \geq \cotan(\theta)$ , alors :

$$\left| \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2} \right| \leq \frac{(|u| + 1)^x}{1 + u^2}$$

Si  $u < \cotan(\theta)$  alors  $\gamma(u, \theta) = 0$ .

Finalement,

$$|\gamma(u, \theta)| \leq \frac{(|u| + 1)^x}{1 + u^2} =: \varphi(u)$$

La fonction  $\varphi$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  et

$$\varphi(u) \underset{u \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2-x}}$$

Comme  $2 - x > 1$  l'hypothèse de domination est vérifiée.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} g(\theta) \sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \gamma(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2},$$

d'où le résultat.

7) Une primitive de  $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$  étant  $\arctan$ , la question précédente implique :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} g(\theta) \sin(x\theta) = [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Mais on a aussi, comme le sinus est continu sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $g$  constante sur  $]-\pi, \pi[$  par la question 3 :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} g(\theta) \sin(x\theta) = g(0) \sin(x\pi) = \sin(x\pi) \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

Par unicité de la limite, on conclut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

## Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

8) Par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

Effectuons le changement de variable  $u = \frac{1}{t}$  dans la seconde intégrale. Il est licite puisque la fonction inverse est de classe  $C^1$  et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ . Elle réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $]0, 1]$ . Alors, comme  $dt = -\frac{1}{u^2} du$

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = - \int_1^0 \frac{u^{1-x}}{1+\frac{1}{u}} \frac{du}{u^2} = \int_0^1 \frac{u^{1-x}}{u(1+u)} du = \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u} du.$$

On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u} du = \int_0^1 \left( \frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t} \right) dt,$$

d'où le résultat.

9) Pour tout  $t \in ]0, 1[$ , comme  $|-t| < 1$ , on a :  $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k$ . On aimerait alors écrire, sous réserve de validité :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 t^{x-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1} dt \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^k t^{x+k-1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}.$$

Pour avoir le résultat voulu, il suffit donc de justifier (\*).

On voit que

$$- \int_0^1 t^{x+k-1} dt = \frac{1}{x+k} \text{ donc } \sum_{k \geq 0} \int_0^1 |(-1)^k t^{x+k-1}| dt \text{ diverge.}$$

On ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue.

— La série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k t^{x+k-1}$  ne converge pas normalement sur  $[0, 1]$ . Il n'est pas facile d'établir la convergence uniforme de la série de fonctions

Nous allons donc utiliser le théorème de convergence dominée avec la suite des sommes partielles, Posons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in ]0, 1[, \quad f_k(t) = (-1)^k t^{x+k-1}.$$

Alors :

- par convergence des séries géométriques de raison strictement entre  $-1$  et  $1$ , la série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} f_k$  converge simplement sur  $]0, 1[$ , et sa somme  $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$  est bien sûr continue (par morceaux) sur  $]0, 1[$ ;
- Domination. Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in ]0, 1[$ , on a :

$$\left| \sum_{k=0}^N f_k(t) \right| = \left| t^{x-1} \sum_{k=0}^N (-t)^k \right| = t^{x-1} \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1+t} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t}, \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application  $\varphi : t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$  est continue (par morceaux) sur  $]0, 1[$ , intégrable en vertu de l'équivalent :  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} > 0$ , et de l'inégalité  $1-x < 1$ . Elle est donc aussi intégrable sur  $]0, 1[$ .

Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^N f_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt,$$

et la linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^N f_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \int_0^1 f_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k},$$

d'où le résultat :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}.$$

- 10) Par la question précédente, appliqué à  $1-x \in ]0, 1[$ , on a :

$$\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-x}.$$

La question 8 donne donc le résultat voulu :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-x}.$$

Pour s'accorder aux notations de l'énoncé, on nomme l'indice de sommation  $n$  dans ce qui suit.

- 11) En effectuant le changement d'indice  $n \mapsto n+1$  dans la seconde somme ci-dessus, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{n+x},$$

donc par la question 7 on a le résultat :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}.$$

- 12) Soit  $y \in ]0, \pi[$ . Posons :  $x = \frac{y}{\pi} \in ]0, 1[$ . Par la question précédente :

$$\frac{\pi}{\sin(y)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2} = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y}{\pi \left( n^2 - \frac{y^2}{\pi^2} \right)}.$$

Il suffit alors de multiplier cette relation par  $\frac{\sin(y)}{\pi}$  pour avoir :

$$1 = \frac{\sin(y)}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{\pi^2 \left(n^2 - \frac{y^2}{\pi^2}\right)} = \frac{\sin(y)}{y} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{-n^2 \pi^2 + y^2},$$

d'où le résultat en réarrangeant les termes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2 \pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}.$$

### Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13) On suppose que  $p$  est un entier naturel pour traiter cette question et les suivantes (oubli de l'énoncé)

L'application  $t \mapsto \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . De plus, pour tout  $t \in [1, +\infty[$  on a :

$$0 \leq \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \leq \frac{2}{t^2},$$

et l'intégrabilité sur  $[1, +\infty[$  de la fonction de Riemann  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  (car l'exposant est  $2 > 1$ ) assure, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$  converge.

Pour  $t$  au voisinage de 0, on écrit :

$$\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} = \frac{1 - \left(1 + O_{t \rightarrow 0}(t^2)\right)^{2p+1}}{t^2} = \frac{1 - \left(1 + (2p+1) \times O_{t \rightarrow 0}(t^2)\right)}{t^2} = O_{t \rightarrow 0}(1),$$

et  $t \mapsto 1$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , donc intégrable sur  $[0, 1]$  et en particulier sur  $]0, 1]$ . Par comparaison, l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$  converge.

Ceci achève de démontrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$  converge.

Passons à la deuxième partie de la question. Nous allons intégrer par parties, en intégrant  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  et en dérivant  $t \mapsto 1 - (\cos(t))^{2p+1}$ , dont la dérivée est  $t \mapsto (2p+1)(\cos(t))^{2p} \sin(t)$ . Comme, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t} = 0,$$

et par la relation de comparaison plus haut :

$$\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t} = t \cdot \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} = O_{t \rightarrow 0}(t),$$

on a :  $\lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t} = 0$ , la formule de l'intégration par parties assure que les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{(2p+1)(\cos(t))^{2p} \sin(t)}{t} dt$$

sont de même nature, donc la seconde intégrale converge aussi et on a de plus :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt &= \left[ \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{(2p+1)(\cos(t))^{2p} \sin(t)}{t} dt \\ &= (2p+1) \int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

14) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On effectue le changement de variable affine  $u = t - n\pi$ . On a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} du.$$

Par la relation de Chasles et le changement de variable  $u \mapsto -u$ , comme le sinus est impair, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} du + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{-u - n\pi} du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} (-1)^n \sin(u) \left( \frac{1}{u - n\pi} + \frac{1}{u + n\pi} \right) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p} (-1)^n \sin(u) \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2} du, \end{aligned}$$

d'où le résultat, quitte à renommer  $u$  en  $t$  :

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} dt.$$

15) On utilise d'abord la relation de Chasles. Comme l'intégrale  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt$  converge par la question 13, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt \stackrel{(q.14)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} dt.$$

Justifions qu'il est possible d'invertir somme et intégrale, par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f_n(t) = (\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

Alors :

- l'application  $f_n$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (on a  $\pm n\pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  car  $n \geq 1$ );
- pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  on a :

$$|f_n(t)| = (\cos(t))^{2p} \frac{2t |\sin(t)|}{|t^2 - n^2\pi^2|} \leq \frac{\pi}{n^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{\pi}{n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}},$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} < +\infty,$$

où la finitude de la dernière somme découle du théorème de comparaison des séries à termes positifs, appliqué à l'équivalent  $\frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$ , et de la convergence des séries de Riemann

d'exposant strictement supérieur à 1; on en déduit que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge

normalement donc uniformément sur le segment  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, d'une part la série  $\sum_{n \geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n$  converge, et d'autre part :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n.$$

C'est-à-dire, en reprenant le calcul amorcé en début de question :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt,$$

d'où le résultat.

16) Par la question précédente et la question 12, qu'on applique avec  $y = t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(1 - \frac{\sin(t)}{t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

d'où le résultat par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} dt.$$

17) Soit  $t \in \mathbb{R}$  (l'énoncé ne précise pas ce qu'est  $t$ ). Par la formule d'Euler et la formule du binôme de Newton, on a :

$$(\cos(t))^{2p} = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (e^{it})^{2p-k} (e^{-it})^k = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)}, \quad (2)$$

et donc :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)} + \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} + \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)}.$$

Or, par le changement d'indice  $k \mapsto 2p - k$ , on a :

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2it(p-k)} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{2p-k} e^{2it(k-p)} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{-2it(p-k)}$$

donc :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \left( e^{2it(p-k)} + e^{-2it(p-k)} \right) + \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p}.$$

Par la formule d'Euler, cela donne le résultat voulu :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left( \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right).$$

18) On a, par les questions 13, 16 et la précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt &= (2p+1) \int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt \\ &= \frac{2p+1}{2^{2p}} \left( \frac{\pi}{2} \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)t) dt \right). \end{aligned}$$

Or, si  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)t) dt = \left[ \frac{\sin(2(p-k)t)}{2(p-k)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin((p-k)\pi)}{2(p-k)} = 0,$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt = \frac{2p+1}{2^{2p}} \cdot \frac{\pi}{2} \binom{2p}{p} = \frac{\pi (2p+1)(2p)!}{2 \cdot 2^{2p}(p!)^2} = \frac{\pi (2p+1)!}{2 \cdot 2^{2p}(p!)^2}.$$

d'où le résultat.

## Partie IV : Calcul de $E(|S_n|)$

19) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Il est clair que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad E(X_k) = 0, \quad V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = E(1) = 1.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = 0,$$

et par indépendance des variables  $X_k$  :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n.$$

D'où le résultat.

20) On a :

$$\cos(S+T) = \cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T).$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos(S)\cos(T)) - E(\sin(S)\sin(T)).$$

Or  $S$  et  $T$  sont indépendantes, donc par le lemme des coalitions il en est de même de  $\cos(S)$  et  $\cos(T)$ , puis de  $\sin(S)$  et  $\sin(T)$ . On en déduit :

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)) - E(\sin(S))E(\sin(T)).$$

Or  $T$  et  $-T$  ont même loi, donc  $\sin(T)$  et  $\sin(-T) = -\sin(T)$  également. Deux variables ayant même loi ont aussi même espérance, d'où :

$$E(\sin(T)) = E(-\sin(T)) = -E(\sin(T)).$$

On en déduit :  $E(\sin(T)) = 0$ , d'où le résultat :

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)).$$

21) Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Au vu de la définition des  $X_k$ , il est clair que  $tX_k$  et  $-tX_k$  ont même loi pour tout  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . De plus, par le lemme des coalitions,  $T = tX_{n+1}$  et  $S = t \sum_{k=1}^n X_k = tS_n$  sont indépendantes. Cela permet d'écrire, par la question précédente :

$$E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(S+T)) = E(\cos(tS_n))E(\cos(tX_{n+1})).$$

Comme  $tX_{n+1}$  a même loi que  $tX_1$ , on a donc :

$$E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(tS_n))E(\cos(tX_1)).$$

Par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(\cos(tX_1)) = \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\cos(-t)}{2} = \cos(t).$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{E}(\cos(tS_{n+1})) = \cos(t)\mathbb{E}(\cos(tS_n)).$$

Autrement dit : la suite  $(\mathbb{E}(\cos(tS_n)))_{n \geq 1}$  est géométrique et de raison  $\cos(t)$ . On conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{E}(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^{n-1}\mathbb{E}(\cos(tS_1)) = (\cos(t))^{n-1}\mathbb{E}(\cos(tX_1)) = (\cos(t))^n.$$

22) On a :

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2\text{signe}(a)|a|b + b^2 = |a|^2 + 2\text{signe}(a)|a|b + (\text{signe}(a)b)^2,$$

c'est-à-dire :

$$|a + b|^2 = (|a| + \text{signe}(a)b)^2.$$

On en déduit que les réels  $|a + b|$  et  $|a| + \text{signe}(a)b$  sont égaux ou opposés. L'hypothèse  $|a| \geq |b|$  assure que  $|a| + \text{signe}(a)b$  est positif. Or  $|a + b|$  l'est aussi, donc :

$$|a + b| = |a| + \text{signe}(a)b.$$

Appliqué à  $a = S_{2n-1}(\omega)$  et  $b = X_{2n}(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$  (dont il faut normalement s'assurer qu'elles vérifient les hypothèses sur  $a$  et  $b$  : voir plus bas), cela donne :

$$|S_{2n}| = |S_{2n-1} + X_{2n}| = |S_{2n-1}| + \text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}, \quad (3)$$

donc par linéarité de l'espérance :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{E}(|S_{2n-1}|) + \mathbb{E}(\text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}) = \mathbb{E}(|S_{2n-1}|).$$

Or  $X_1, \dots, X_{2n}$  sont indépendantes, donc par le lemme des coalitions il en est de même de  $X_{2n}$  et  $\text{signe}(S_{2n-1})$ . On en déduit :

$$\mathbb{E}(\text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}) = \mathbb{E}(\text{signe}(S_{2n-1}))\mathbb{E}(X_{2n}) \stackrel{(q.19)}{=} 0,$$

d'où le résultat :

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{E}(|S_{2n-1}|).$$

Il reste à justifier que les choix  $a = S_{2n-1}(\omega)$  et  $b = X_{2n}(\omega)$  sont licites. C'est-à-dire : justifions que  $S_{2n-1}(\omega)$  est non nul et que :  $|S_{2n-1}(\omega)| \geq |X_{2n}(\omega)|$ . On a :  $S_{2n-1}(\omega) = \sum_{k=1}^{2n-1} X_k(\omega)$ , et comme les  $X_k(\omega)$  sont dans  $\{-1, 1\}$ , on a :

$$S_{2n-1}(\omega) \equiv \sum_{k=1}^{2n-1} 1 \pmod{2} \equiv 2n - 1 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{2},$$

donc  $S_{2n-1}(\omega)$  ne peut pas être nul (c'est une façon comme une autre de justifier que, pour qu'une somme de 1 et de -1 soit nulle, il faut autant de 1 que de -1, ce qui est impossible si on somme un nombre impair de termes). Comme  $S_{2n-1}(\omega)$  est à valeurs entières, ceci impose :

$$|S_{2n-1}(\omega)| \geq 1 = |X_{2n}(\omega)|,$$

d'où le résultat : la relation (3) est vraie.

23) Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Comme chaque membre de l'égalité à démontrer est une fonction paire de  $s$ , il suffit de la démontrer pour  $s \geq 0$ .

Si  $s = 0$ , on a immédiatement :  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0 = \frac{\pi}{2}|0|$ . Supposons donc  $s > 0$ .

Le changement de variable affine  $u = st$  donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{(u/s)^2} \frac{du}{s} = s \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du.$$

Par la question 18 avec  $p = 0$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du = \frac{\pi}{2},$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}s = \frac{\pi}{2}|s|.$$

D'où le résultat pour  $s \geq 0$ , et donc pour  $s \in \mathbb{R}$  par parité.

24) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Par le théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right) = \sum_{s \in \mathcal{S}_n(\Omega)} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt \right) \mathbb{P}(S_n = s) = \sum_{s \in \mathcal{S}_n(\Omega)} \frac{\pi}{2}|s| \cdot \mathbb{P}(S_n = s),$$

et donc, encore par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right) = \frac{\pi}{2} \mathbb{E}(|S_n|).$$

Mais on a aussi, par le théorème d'intégration terme à terme positif, dont les hypothèses découlent aisément des questions précédentes (intégrabilité du terme général, etc.) :

$$\mathbb{E} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right) = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{s \in \mathcal{S}_n(\Omega)} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} \mathbb{P}(S_n = s) \right) dt.$$

Par le théorème de transfert, cela donne aussi :

$$\mathbb{E} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left( \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} \right) dt.$$

En comparant les deux expressions de  $\mathbb{E} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right)$  obtenues, on a donc :

$$\mathbb{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left( \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} \right) dt.$$

Par linéarité de l'espérance et la question 21, on conclut :

$$\mathbb{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathbb{E}(\cos(tS_n))}{t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^n}{t^2} dt.$$

25) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . En combinant les questions 18 (avec  $p = n - 1$ ), 22 et la précédente, on a immédiatement le résultat voulu :

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{E}(|S_{2n-1}|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2n-1}}{t^2} dt = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2} ((n-1)!)^2}.$$