

## Exercice

## Partie I

1) Avec les notations de l'énoncé

$$\begin{aligned}
 X^\top H X &= \sum_{0 \leq j, k \leq n-1} x_j h_{j,k} x_k \\
 &= \sum_{0 \leq j, k \leq n-1} x_j x_k \int_0^1 t^{j+k} dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{0 \leq j, k \leq n-1} x_j x_k t^{j+k} dt \\
 &= \int_0^1 P_X^2(t) dt
 \end{aligned}$$

2) Dans les notations précédentes, comme  $P_X$  est à coefficients réels,  $P_X^2$  est à valeurs positives sur  $\mathbb{R}$  donc  $X^\top H X \geq 0$  par positivité de l'intégrale.

De plus, comme  $P_X^2$  est continue et  $[0, 1]$  n'est pas trivial,  $X^\top H X$  ne s'annule que si  $P_X^2$  est identiquement nulle sur  $[0, 1]$ . Dans l'affirmative,  $P_X$  a une infinité de racines donc ses coefficients sont tous nuls c'est-à-dire  $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ .

Ainsi la matrice symétrique  $H$  appartient à  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

3) D'après le théorème spectral,  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de  $H$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres **deux à deux distinctes** de  $H$  avec  $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k = \rho$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Soient  $X_1, \dots, X_k$  les composantes de  $X$  correspondant à la décomposition en somme directe ci-dessus. Ainsi

$$X^\top H X = \sum_{j=1}^k \lambda_j \|X_j\|^2 \leq \sum_{j=1}^k \rho \|X_j\|^2 = \rho \|X\|^2$$

avec égalité si et seulement si pour tout  $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$  on a  $(\rho - \lambda_j) \|X_j\|^2 = 0$  c'est-à-dire  $X_j = 0$ .

Ainsi on  $X^\top H X = \rho \|X\|^2 \Leftrightarrow X = X_k \Leftrightarrow X \in F$ .

4) Avec les notations de l'énoncé

$$\begin{aligned}
 X_0^\top H_n X_0 &= \sum_{0 \leq j, k \leq n-1} h_{j,k} x_j x_k \\
 &\leq \sum_{0 \leq j, k \leq n-1} h_{j,k} |x_j| \cdot |x_k| \quad \text{par positivité des coefficients de } H \\
 &= |X_0|^\top H_n |X_0|
 \end{aligned}$$

On a donc par la question précédente :

$$|X_0|^\top H_n |X_0| \geq \rho \|X_0\|^2 = \| |X_0| \|^2$$

Ainsi en utilisant à nouveau la question précédente,  $|X_0| \in F$ .

5) Soit  $j \in \llbracket 0, n \llbracket$ .

$$(HX_0)[j] = \sum_{0 \leq k \leq n-1} h_{j,k} |x_k| > 0$$

car tous les termes de cette somme sont positifs ou nuls et au moins un d'eux est non nul car  $X \neq 0$  et les coefficients de  $H$  sont strictement positifs.

Enfin comme  $|X_0| = \frac{1}{\rho} H|X_0|$ ,  $|X_0|$  n'a aucun coefficient nul donc  $X_0$  non plus.

6) Soit  $X_1 \in F$ .

Comme  $X_0$  n'a aucun coefficient nul, on peut poser  $Y = X_1 - \mu X_0$  avec  $\mu = \frac{X_1[0]}{X_0[0]}$ . Comme  $F$  est stable par combinaison linéaire et comme  $X_1$  et  $X_0$  appartiennent à  $F$ ,  $Y$  appartient à  $F$ .

Or le coefficient d'indice 0 de  $Y$  est nul. Par la question précédente,  $Y$  est nul. Donc  $X_1 = \mu X_0$ .

Ainsi  $F \subset \text{Vect}(X_0)$ . Donc  $\dim(F) \leq 1$ . Comme  $\rho$  est valeur propre,  $F$  est de dimension au moins 1 donc  $\boxed{\dim F = 1}$ .

## Partie II

7) Soit  $Q = \sum_{k=0}^p x_p T^k$ . Quitte à remplacer  $p$  par  $p+1$ , on peut supposer que  $p$  est  $\boxed{\text{pair}}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta &= \int_0^\pi (x_0 e^{i\theta} + \dots + x_p e^{i(p+1)\theta}) d\theta \\ &= \left[ x_0 \frac{e^{i\theta}}{i} + \dots + x_p \frac{e^{i(p+1)\theta}}{i(p+1)} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{i} \left( 2x_0 + 2\frac{x_2}{3} + 2\frac{x_4}{5} + \dots + \frac{2}{p+1} x_p \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\int_{-1}^1 Q(t) dt = 2x_0 + 2\frac{x_2}{3} + \dots + 2\frac{x_p}{p+1}$$

Donc

$$\left| \int_{-1}^1 Q(t) dt \right| = \left| \int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi |Q(e^{i\theta})| d\theta$$

car  $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad |e^{i\theta}| = 1$ .

8) Soit  $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$X^\top H X = \int_0^1 P_X^2(t) dt \leq \int_{-1}^1 P_X^2(t) dt = \left| \int_{-1}^1 P_X^2(t) dt \right|$$

car  $P_X^2$  est à valeurs positives.

Appliquant la question précédente au polynôme  $Q = P_X^2$  qui est à coefficients réels, on obtient :

$$X^\top H_n X \leq \int_0^\pi |P_X(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

9) On a alors

$$\begin{aligned}
X^\top H X &\leq \int_0^\pi |P_X(e^{i\theta})|^2 d\theta \\
&= \int_0^\pi \left( \sum_{0 \leq j < n} x_j e^{ij\theta} \right) \left( \sum_{0 \leq k < n} x_k e^{-ik\theta} \right) d\theta \\
&= \int_0^\pi \left( \sum_{0 \leq j, k < n} x_j x_k e^{i(j-k)\theta} \right) d\theta \\
&= \sum_{0 \leq j, k < n} x_j x_k \int_0^\pi e^{i(j-k)\theta} d\theta \\
&= \sum_{0 \leq j < n} x_j^2 + \sum_{0 \leq j \neq k < n} x_j x_k \frac{(-1)^{j-k} - 1}{i(j-k)} \\
&= \|X\|^2 + \sum_{0 \leq j < k < n} x_j x_k \left( \frac{(-1)^{j-k} - 1}{i(j-k)} + \frac{(-1)^{k-j} - 1}{i(k-j)} \right) \\
&= \|X\|^2 + \sum_{0 \leq j < k < n} 0 = \|X\|^2
\end{aligned}$$

(on pouvait aussi dire que comme le membre de gauche est réel, il est égal à la partie réelle du membre de droite)

10) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $X$  un vecteur propre de  $H_n$  associé à la valeur propre  $\rho_n$ .

Soit  $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0_{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$

Alors  $Y^\top H_{n+1} Y = X^\top H_n X = \rho_n \|X\|^2$ .

Or  $Y^\top H_{n+1} Y \leq \rho_{n+1} \|Y\|^2 = \rho_{n+1} \|X\|^2$ .

Comme  $\|X\|^2 > 0$ , on en déduit  $\rho_n \leq \rho_{n+1}$ .

Par ailleurs la question précédente (avec le même vecteur  $X$ ) montre que  $\rho_n \leq \pi$ .

Ainsi la suite  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  est croissante et majorée par  $\pi$ , donc converge vers une limite  $\ell \leq \pi$ .

## Problème

### I. Oscillations d'un certain système linéaire

1) Comme  $A$  appartient à  $S_n^{++}$ , son spectre est inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$  donc ne contient pas 0.

Donc  $\boxed{A - 0.I_n \text{ est inversible}}$ .

2)  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$  donc  $A^{-1}$  est symétrique.

3)  $(\cdot; \cdot)_A : (x, y) \mapsto x^T A y$  est

-bilinéaire par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition,

-symétrique car  $\forall (x, y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , comme la matrice  $x^T A y$  est de format  $(1, 1)$  donc symétrique,

$$x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x$$

car  $A$  est symétrique.

-définie positive car  $A$  est définie positive.

Donc c'est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^n, (u(x); y)_A &= (A^{-1}Kx)^T Ay = x^T K^T (A^{-1})^T Ay \\ &= x^T K A^{-1} Ay \quad \text{car } A^{-1} \text{ et } K \text{ sont symétriques} \\ &= x^T K y = x^T A A^{-1} K y = \boxed{(x; u(y))_A} \end{aligned}$$

4) Par la question précédente, l'endomorphisme  $u$  est autoadjoint pour le produit scalaire  $(.;.)_A$ .  
Donc, par le théorème spectral, il existe une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  orthonormale au sens de  $(.;.)_A$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

De plus  $u$  est défini positif au sens de  $(.;.)_A$  car le calcul précédent montre que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(u(x); x)_A = x^T K x$  et  $K$  est définie positive.

Donc  $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

Ainsi il existe  $n$  réels strictement positifs  $\lambda_i \in \mathbb{R}^{+*}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, u(e_i) = A^{-1}K e_i = \lambda_i e_i$$

5) Soit  $x \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$ .

Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , notons  $x_1(t) = e_1^*(t), \dots, x_n(t) = e_n^*(t)$  les coordonnées de  $x(t)$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Les fonctions  $x_1, \dots, x_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  car les termes de la base duale  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  de  $(e_1, \dots, e_n)$  sont linéaires.

$x$  est solution de (1) si et seulement si pour tout  $t \geq 0$ ,  $x''(t) = -u(t)$  c'est-à-dire

$$x_1''(t)e_1 + \dots + x_n''(t)e_n = -(\lambda_1 x_1(t)e_1 + \dots + \lambda_n x_n(t)e_n)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_1''(t) &= -\omega_1^2 x_1(t) \\ \vdots & \\ x_n''(t) &= -\omega_n^2 x_n(t) \end{cases}$$

Donc  $x$  est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si il existe  $2n$  nombres réels  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n}$  tels que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, x(t) = \sum_{i=1}^n (a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)) e_i$$

Par le raisonnement précédent, l'espace vectoriel des solutions de (1) est isomorphe, via l'application  $x \mapsto (e_1^* \circ x, \dots, e_n^* \circ x)$ , au produit des espaces vectoriels des solutions de  $x_1'' = -\lambda_1 x_1, \dots, x_n'' = -\lambda_n x_n$ , qui sont chacun de dimension 2 d'après le cours.

Donc l'ensemble des solutions de (1) est un espace vectoriel de dimension  $2n$ .

6) Soient  $x, y \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$ . Par bilinéarité de  $\langle.;.\rangle$ ,

$$\forall t \in [0, +\infty[, \frac{d}{dt}(\langle Ax; y \rangle)(t) = \langle (Ax)'(t); y(t) \rangle + \langle Ax(t); y'(t) \rangle = \boxed{\langle Ax'(t); y(t) \rangle + \langle Ax(t); y'(t) \rangle}$$

car  $A$  est constante (indépendante de  $t$ ).

7) Soit  $x \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$  une solution de l'équation différentielle (1).

$$\begin{aligned} \left( (T(x) + U(x))' \right) (t) &= \frac{1}{2} \langle Ax''(t); x'(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax'(t); x''(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle Kx'(t); x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle Kx(t); x'(t) \rangle \\ &= \langle Ax''(t); x'(t) \rangle + \langle Kx(t); x'(t) \rangle \text{ car } A \text{ et } K \text{ sont symétriques} \\ &= \langle Ax''(t) + Kx(t); x'(t) \rangle \\ &= \langle 0; x'(t) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Donc la quantité  $T(x)(t) + U(x)(t)$  ne dépend pas de  $t \in [0, +\infty[$ .

## II. Résultats intermédiaires.

8) En reconnaissant une dérivée exacte,

$$\int_0^\pi \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k \sin t \, dt = \left[ -\frac{1}{2^k(k+1)} (1 + \cos t)^{k+1} \right]_0^\pi = \frac{2}{k+1}$$

Par le changement de variable  $t = 2\pi - \theta$ ,

$$\int_\pi^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt = \int_\pi^0 \left( \frac{1 + \cos(2\pi - \theta)}{2} \right)^k (-d\theta) = \int_0^\pi \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^k d\theta$$

par parité et  $2\pi$ -périodicité de  $\cos$ .

D'où

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt = 2 \int_0^\pi \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt \geq 2 \int_0^\pi \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k \sin t \, dt = \frac{4}{k+1} > 0$$

car  $1 + \cos \geq 0$  et  $\sin \leq 1$ .

Donc  $c_k$  est bien défini et  $c_k \leq \frac{k+1}{4}$ .

9) Soit  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ .

Comme  $1 + \cos$  est positive, décroissante sur  $[0, \pi]$  et invariante par composition à droite par  $t \mapsto 2\pi - t$ , on a

$$0 \leq \delta_k(\varepsilon) = R_k(\varepsilon) \leq \frac{k+1}{4} \left( \frac{1 + \cos \varepsilon}{2} \right)^k$$

Or  $0 \leq \frac{1 + \cos \varepsilon}{2} < 1$  donc  $\left( \frac{1 + \cos \varepsilon}{2} \right)^k = o_{k \rightarrow \infty}(1/k) = o_{k \rightarrow \infty}(1/(k+1))$  et ainsi par encadrement

$$\boxed{\delta_k(\varepsilon) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0}$$

10) a) Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ .

$g$  étant continue, sa restriction au segment  $[0, 2\pi]$  est bornée.

De plus, pour tout réel  $t$ , notant  $n = \lfloor \frac{t}{2\pi} \rfloor$ , on a  $n \leq \frac{t}{2\pi} < n+1$  donc  $0 \leq t - 2n\pi < 2\pi$  et ainsi, puisque  $g$  est  $2\pi$ -périodique,

$$|g(t)| = |g(t - 2n\pi)| \leq \|g\|_{\infty, [0, 2\pi]}$$

.

Donc  $g$  est bornée (et  $\|g\| = \|g\|_{\infty, [0, 2\pi]}$ ).

b) Soit  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ , et  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $h \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $u$  un réel.

Par le changement de variable  $t = u - t_1$ ,

$$\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt = \int_u^{u-2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)(-dt_1) = \int_{u-2\pi}^u R_k(t_1)h(u-t_1)dt_1$$

D'après un théorème de MPSI, l'intégrale d'une fonction périodique continue par morceaux sur "un intervalle de période" ne dépend pas de cet intervalle. Comme  $t_1 \mapsto R_k(t_1)h(u-t_1)$  est continue et  $2\pi$ -périodique,

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt = \int_0^{2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)dt_1}$$

Par l'égalité précédente et la relation  $\int_0^{2\pi} R_k(t_1)dt_1 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt - h(u) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)dt_1 - h(u) \int_0^{2\pi} R_k(t_1)dt_1 \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} R_k(t_1)(h(u-t_1) - h(u))dt_1 \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} R_k(t_1) |h(u-t_1) - h(u)| dt_1, \end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant obtenue par inégalité triangulaire intégrale et positivité de  $R_k$ .

Par croissance l'intégrale et en majorant  $|h(u-t_1) - h(u)|$  par  $|h(u-t_1)| + |h(u)|$ ,

$$\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} R_k(t_1) |h(u-t_1) - h(u)| dt_1 \leq (2\pi - 2\varepsilon)\delta_k(\varepsilon)2\|h\| \leq 4\pi\|h\|\delta_k(\varepsilon)$$

Par inégalité des accroissements finis, on peut également majorer  $|h(u-t_1) - h(u)|$  par  $|t_1| \cdot \|h'\|$  et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon} R_k(t_1) |h(u-t_1) - h(u)| dt_1 &\leq \int_0^{\varepsilon} R_k(t_1) \|h'\| \cdot |t_1| dt_1 \\ &\leq \int_0^{\varepsilon} R_k(t_1) \|h'\| \cdot \varepsilon dt_1 \\ &\leq \int_0^{2\pi} R_k(t_1) \|h'\| \cdot \varepsilon dt_1 \\ &= \varepsilon \|h'\| \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t_1) |h(u-t_1) - h(u)| dt_1 &= \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t_1) |h(u-t_1+2\pi) - h(u)| dt_1 \\ &\leq \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t_1) (2\pi-t_1) \|h'\| dt_1 \\ &\leq \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t_1) \varepsilon \|h'\| dt_1 \\ &\leq \int_0^{2\pi} R_k(t_1) \|h'\| \cdot \varepsilon dt_1 \\ &= \varepsilon \|h'\| \end{aligned}$$

Donc par la relation de Chasles,

$$\left| \int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt - h(u) \right| \leq 2 \|h'\| \varepsilon + 4\pi \|h\| d_k(\varepsilon)$$

### III. Un théorème ergodique.

Dans toute la suite on se limite au cas  $n = 2$  de la partie I.

11) Soit  $x \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathbb{R}^2)$  une solution de l'équation (1).

D'après la question 5), on sait qu'il existe quatre réels  $a_1, a_2, b_1, b_2$  tels que pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,

$$x(t) = \sum_{i=1}^2 (a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)) e_i$$

où, pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\omega_i^2 = \lambda_i$ .

Soit  $i \in \{1, 2\}$ . Si  $a_i = b_i = 0$ , on peut poser  $c_i = \varphi_i = 0$ . On a bien que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t) = c_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) = 0$$

Sinon, on pose  $c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$  et  $a'_i = \frac{a_i}{c_i}$ ,  $b'_i = \frac{b_i}{c_i}$ . On vérifie alors que  $(a'_i)^2 + (b'_i)^2 = 1$ . Il existe donc  $\varphi_i \in \mathbb{R}$  tel que  $\cos(\varphi_i) = a'_i$  et  $\sin(\varphi_i) = b'_i$ .

Pour  $t \geq 0$ ,

$$a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t) = c_i (a'_i \cos(\omega_i t) + b'_i \sin(\omega_i t)) = c_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

Il existe bien quatre réels  $c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2$  tels que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, x(t) = \sum_{i=1}^2 c_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e_i$$

12) Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi, 2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ .

a) On sait que  $K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$  (en tant que produit de deux compacts). La fonction  $f$  étant continue, elle est bornée sur  $K$  et atteint ses bornes. On note

$$M = \sup_{(\theta_1, \theta_2) \in K} |f(\theta_1, \theta_2)| = \max_{(\theta_1, \theta_2) \in K} |f(\theta_1, \theta_2)|$$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrons par récurrence que pour tout  $p, q$  dans  $\mathbb{Z}^2$ ,  $f(x+2p\pi, y+2q\pi) = f(x, y)$ . On procède par récurrence sur  $d = |p| + |q|$  en notant

$\mathcal{P}(d)$  : « pour  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $|p| + |q| \leq d$  on a  $f(x + 2p\pi, y + 2q\pi) = f(x, y)$  ».

— Soit  $d = 0$ . Le prédicat  $\mathcal{P}(0)$  est vérifié car si  $d = 0$  alors  $p = q = 0$ .

— Soit  $d \in \mathbb{N}$ . On suppose  $\mathcal{P}(d)$  et on montre  $\mathcal{P}(d+1)$ . Soit  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $|p| + |q| \leq d+1$ .

Si  $|p| + |q| \leq d$  alors  $f(x + 2p\pi, y + 2q\pi) = f(x, y)$  par hypothèse de récurrence.

Sinon, si  $p > 0$  alors

$$f(x + 2p\pi, y + 2q\pi) = f(x + 2(p-1)\pi, y + 2q\pi) \stackrel{HR}{=} f(x, y)$$

Si  $p < 0$  alors

$$f(x + 2p\pi, y + 2q\pi) = f(x + 2(p + 1)\pi, y + 2q\pi) \stackrel{HR}{=} f(x, y)$$

Si  $p = 0$  alors, on procède de même en séparant selon que  $q > 0$  ou  $q < 0$ .

On en déduit que pour tout  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et tout  $(p, q)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ ,  $f(x + 2p\pi, y + 2q\pi) = f(x, y)$ .

Maintenant, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On pose  $k_x = \lfloor \frac{x}{2\pi} \rfloor$  et  $k_y = \lfloor \frac{y}{2\pi} \rfloor$  puis  $\theta_1 = x - 2k_x\pi$ ,  $\theta_2 = y - 2k_y\pi$ . Comme par définition,  $k_x \leq \frac{x}{2\pi} < k_x + 1$ ,  $\theta_1 \in [0, 2\pi[$ . De même  $\theta_2 \in [0, 2\pi[$ . On en déduit que  $(\theta_1, \theta_2) \in K$  et donc

$$|f(x, y)| = |f(\theta_1 + 2k_x\pi, \theta_2 + 2k_y\pi)| = |f(\theta_1, \theta_2)| \leq M$$

On a montré que  $f$  est bornée et que  $(\theta_1, \theta_2) \mapsto |f(\theta_1, \theta_2)|$  atteint sa borne supérieure sur  $\mathbb{R}^2$ .

En particulier

$$M = \sup_{(\theta_1, \theta_2) \in K} |f(\theta_1, \theta_2)| = \sup_{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2} |f(\theta_1, \theta_2)|$$

b) On commence par vérifier que, pour tout  $\theta_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\theta_1 \mapsto f(\theta_1, \theta_2)$  est continue. On peut donc intégrer sur le segment  $[0, 2\pi]$ . Notons

$$v : \theta_2 \mapsto \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1$$

On montre alors que  $v$  est continue en appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

- i) Pour tout  $\theta_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\theta_1 \mapsto f(\theta_1, \theta_2)$  est continue (par morceaux) sur  $[0, 2\pi]$ .
- ii) Pour tout  $\theta_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\theta_2 \mapsto f(\theta_1, \theta_2)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- iii) Domination. Pour tout  $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ , pour tout  $\theta_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(\theta_1, \theta_2)| \leq \|f\|$$

La fonction constante  $\theta_1 \mapsto \|f\|$  est intégrable sur le segment  $[0, 2\pi]$ .

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction  $v$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

13) Soit  $j, \ell \in \mathbb{Z}$ . On pose  $f : (\theta_1, \theta_2) \mapsto e^{i\theta_1 j} e^{i\theta_2 \ell}$

— Si  $\boxed{(j, \ell) = (0, 0)}$ , la fonction  $f$  est la fonction constante égale à 1. Dans ce cas car pour tout  $T > 0$  et tout  $t \in [0, T]$ ,  $(f \circ \theta)(t) = 1$  d'où

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t) dt = 1}$$

De plus, pour tout  $\theta_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = 2\pi$  donc

$$\boxed{(2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^2} = 1}$$

Le Théorème Ergodique est vérifié.

— Si  $(j, \ell) \neq (0, 0)$ .

Pour  $T > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^T (f \circ \theta)(t) dt &= \int_0^T f(\omega_1 t + \varphi_1, \omega_2 t + \varphi_2) dt \\ &= \int_0^T e^{ij(\omega_1 t + \varphi_1)} e^{i\ell(\omega_2 t + \varphi_2)} dt \\ &= e^{i(j\varphi_1 + \ell\varphi_2)} \int_0^T e^{i(j\omega_1 + \ell\omega_2)t} dt \end{aligned}$$

Comme  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  n'est pas rationnel,  $j\omega_1 + \ell\omega_2 \neq 0$  d'où

$$\int_0^T e^{i(j\omega_1 + \ell\omega_2)t} dt = \left[ \frac{1}{i(j\omega_1 + \ell\omega_2)} e^{i(j\omega_1 + \ell\omega_2)t} \right]_0^T = \frac{e^{i(j\omega_1 + \ell\omega_2)T} - 1}{i(j\omega_1 + \ell\omega_2)}$$

On en déduit que

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t) dt \right| \leq \frac{2}{T|j\omega_1 + \ell\omega_2|} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

Cela donne

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t) dt = 0$$

D'autre part, pour tout  $\theta_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 = e^{i\theta_2 \ell} \int_0^{2\pi} e^{i\theta_1 j} d\theta_1 = \begin{cases} \left[ \frac{1}{ij} e^{i\theta_1 j} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } j \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

Donc, si  $j \neq 0$ ,  $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = 0$ .

Dans le cas où  $j = 0$ , on a  $\ell \neq 0$  et

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} e^{i\theta_2 \ell} d\theta_2 = 2\pi \left[ \frac{1}{i\ell} e^{i\theta_2 \ell} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Le Théorème Ergodique est aussi vérifié dans ce cas.

14) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  on veut exprimer

$$f_k(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) R_k(v - \theta_2) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

On utilise d'abord que  $\frac{1 + \cos(t)}{2} = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$ . On en déduit que

$$\begin{aligned}
R_k(u - \theta_1) &= c_k \left( \frac{1 + \cos(u - \theta_1)}{2} \right)^k \\
&= c_k \cos^{2k} \left( \frac{u - \theta_1}{2} \right) \\
&= c_k \left( \frac{e^{i(u-\theta_1)/2} + e^{-i(u-\theta_1)/2}}{2} \right)^{2k} \\
&= \frac{c_k}{4^k} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} e^{ij(u-\theta_1)/2} e^{-i(2k-j)(u-\theta_1)/2} \\
&= \frac{c_k}{4^k} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} e^{i(j-k)(u-\theta_1)} \\
&= \frac{c_k}{4^k} \sum_{j=-k}^k \binom{2k}{j+k} e^{iju} e^{-ij\theta_1}
\end{aligned}$$

De même

$$R_k(v - \theta_2) = \frac{c_k}{4^k} \sum_{\ell=-k}^k \binom{2k}{k+\ell} e^{i\ell v} e^{-i\ell\theta_2}$$

On en déduit, par linéarité des intégrales, que

$$f_k(u, v) = \sum_{-k \leq j, \ell \leq k} a_{j, \ell} e^{iuj} e^{iv\ell}$$

où, pour  $j$  et  $\ell$  dans  $\llbracket -k, k \rrbracket$ ,

$$a_{j, \ell} = \frac{c_k^2}{16^k} \binom{2k}{j+k} \binom{2k}{\ell+k} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta_1} e^{-\ell\theta_2} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

On a vu à la question précédente que les fonctions de la forme  $(\theta_1, \theta_2) \mapsto e^{ij\theta_1} e^{i\ell\theta_2}$  vérifiaient le Théorème Ergodique. Par linéarité, les fonctions  $f_k$  le vérifient aussi.

- 15) Soit  $\varepsilon \in ]0, \pi[$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Pour tout  $\theta_2 \in \mathbb{R}$ , en utilisant la question 10) pour la fonction  $h : t \mapsto f(t, \theta_2)$  qui est bien  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$ , on a

$$\left| \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 - f(u, \theta_2) \right| \leq 2 \|h'\| \varepsilon + 4\pi \|h\| d_k(\varepsilon)$$

Or  $h'$  est la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial \theta_1}(t, \theta_2)$  donc

$$\left| \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 - f(u, \theta_2) \right| \leq 2 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| \varepsilon + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon)$$

On en déduit par intégration que

$$\begin{aligned}
|f_k(u, v) - g_k(u, v)| &= \left| f_k(u, v) - \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) f(u, \theta_2) d\theta_2 \right| \\
&\leq \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) \left| \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 - f(u, \theta_2) \right| d\theta_2 \\
&\leq \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) \left( 2 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| \varepsilon + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon) \right) d\theta_2 \\
&\leq 2 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| \varepsilon + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon)
\end{aligned}$$

De plus, en appliquant encore la question 10) mais à la fonction  $h : t \mapsto f(u, t)$  qui est  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$  on obtient que

$$|g_k(u, v) - f(u, v)| = \left| \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) f(u, \theta_2) d\theta_2 - f(u, v) \right| \leq 2 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \varepsilon + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon)$$

On en déduit, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |f_k(u, v) - f(u, v)| &\leq \left| f_k(u, v) - \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) f(u, \theta_2) d\theta_2 \right| + \left| \int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) f(u, \theta_2) d\theta_2 - f(u, v) \right| \\ &\leq 2\varepsilon \left( \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 8\pi \|f\| d_k(\varepsilon) \end{aligned}$$

16) On pose  $M = 2 \left( \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 8\pi \|f\|$ .

On se donne  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ . On sait d'après la question 9) que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_k(\varepsilon) = 0$ . Il existe donc  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $d_k(\varepsilon) < \varepsilon$ . On fixe alors un tel entier  $k$ . D'après la question 14) la fonction  $f_k$  vérifie le Théorème Ergodique donc

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T (f_k \circ \theta)(t) dt = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

Par définition de la limite, il existe  $T_0 > 0$  tel que pour  $T \geq T_0$ ,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T (f_k \circ \theta)(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| < \varepsilon$$

Pour  $T \geq T_0$ ,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| \leq A + B + C$$

où

$$A = \left| \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T (f_k \circ \theta)(t) dt \right| \leq \frac{T}{T} \|f - f_k\| \leq M\varepsilon$$

$$B = \left| \frac{1}{T} \int_0^T (f_k \circ \theta)(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| < \varepsilon$$

et

$$\begin{aligned} C &= \left| (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| \\ &\leq (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f - f_k\| \leq M\varepsilon \end{aligned}$$

Donc pour  $T \geq T_0$ ,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| \leq (2M + 1)\varepsilon$$

Cela prouve le Théorème Ergodique pour  $f$ .

17) a) La fonction  $\psi_{a,b}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 2\pi] \setminus \{a, b\}$  par les théorèmes généraux.

Vérifions que  $\psi_{a,b}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un voisinage de  $a$ . On voit d'abord que  $\psi_{a,b}$  est continue en  $a$  car  $\lim_{t \rightarrow a} \sin^2\left(\frac{\pi}{b-a}(t-a)\right) = \sin^2(0) = 0$ .

Sur  $]a, b[$ ,  $\psi'_{a,b}(t) = \frac{2\pi}{b-a} \cos\left(\frac{\pi}{b-a}(t-a)\right) \sin\left(\frac{\pi}{b-a}(t-a)\right)$ . On en déduit que  $\lim_{t \rightarrow a^+} \psi'_{a,b}(t) = 0$ .

Par le théorème de dérivabilité d'un prolongement, la fonction  $\psi_{a,b}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un voisinage de  $a$ . Un calcul similaire en utilisant que  $\sin\left(\frac{\pi}{b-a}(b-a)\right) = \sin(\pi) = 0$  donne que  $\psi_{a,b}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $b$ .

b) Supposons par l'absurde que  $\forall t \in [0, +\infty[ \quad x(t) \notin \Omega$ .

Comme  $\Omega$  est ouvert et non vide, il contient une boule ouverte au sens de la norme

$$\|\cdot\|_{\infty, (e_1, e_2)} : \mathbb{R}^2 \ni y \mapsto \max(|e_1^*(y)|, |e_2^*(y)|)$$

donc il existe  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in ]0, 1[$  tels que  $\alpha < \beta$  et  $\gamma < \delta$  et  $\Omega \supset \{ue_1 + ve_2, (u, v) \in ]\alpha, \beta[ \times ]\gamma, \delta[ \}$ .

Ainsi pour tout  $t \geq 0$ , posant  $(x_1(t), x_2(t)) = (\cos(t\omega_1 + \varphi_1), \cos(t\omega_2 + \varphi_2))$ , on a  $(x_1(t), x_2(t)) \notin ]\alpha, \beta[ \times ]\gamma, \delta[$ .

Posons  $a = \arccos(\beta), b = \arccos(\alpha), c = \arccos(\delta), d = \arccos(\gamma)$  et

$$\Phi : (\theta_1, \theta_2) \mapsto \tilde{\psi}_{a,b}(\theta_1) \tilde{\psi}_{c,d}(\theta_2)$$

où  $\tilde{\psi}_{a,b}$  est la fonction obtenue en prolongeant  $\psi_{a,b}$  par  $2\pi$ -périodicité.

Comme  $\tilde{\psi}_{a,b}$  est nulle au voisinage des multiples de  $2\pi$  elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Donc  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  comme produit de  $\tilde{\psi}_{a,b} \circ ((\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_1)$  et de  $\dots$ , qui sont des composées de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

De plus pour tout  $t \geq 0$

$$\Phi(\theta(t)) = \Phi(t\omega_1 + \varphi_1, t\omega_2 + \varphi_2) = 0$$

car

$$(t\omega_1 + \varphi_1, t\omega_2 + \varphi_2) \notin \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} (]a + 2\pi p, b + 2\pi p[ \times ]c + 2\pi q, d + 2\pi q[)$$

car sinon on aurait

$$(\cos(t\omega_1 + \varphi_1), \cos(t\omega_2 + \varphi_2)) \in ]\alpha, \beta[ \times ]\gamma, \delta[$$

par décroissance stricte de  $\cos$  sur  $[0, \pi]$ .

Par le théorème ergodique, on aurait

$$0 = (2\pi)^{-2} \left( \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) \tilde{\psi}_{a,b}(\theta_1) d\theta_1 \right) \left( \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_2) \tilde{\psi}_{c,d}(\theta_2) d\theta_2 \right)$$

ce qui est contradictoire car les deux intégrales du membre de droite sont strictement positives car les intégrandes sont positives, continues et non identiquement nulles, et  $0 \neq 2\pi$ .

Ainsi il existe  $t \geq 0$  tel que  $x(t) \in \Omega$ .