

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|$.

On note $H = (h_{j,k})_{0 \leq j,k \leq n-1} \in S_n(\mathbb{R})$ définie par

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

On a donc $h_{j,k} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $P_X(T) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k T^k \in \mathbb{R}[T]$.

Partie I

1) Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, vérifier que $X^\top H X = \int_0^1 P_X^2(t) dt$.

2) En déduire que la matrice H appartient à $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On note ρ la plus grande valeur propre de H et $F = E_\rho(H)$ le sous-espace propre de H associé à la valeur propre ρ .

3) Montrer que $X \in F$ si et seulement si $X^\top H X = \rho \|X\|^2$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de F . On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

4) Établir l'inégalité $X_0^\top H X_0 \leq |X_0|^\top H |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in F$.

5) Montrer que $H|X_0|$ n'a aucun coefficient nul, puis que X_0 n'a aucun coefficient nul.

6) En déduire la dimension du sous-espace propre F .

Partie II

7) Soit Q un polynôme à coefficients réels.

a) Exprimer les intégrales $\int_0^\pi Q(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$ et $\int_{-1}^1 Q(t)dt$ en fonction des coefficients de Q .

b) En déduire que

$$\left| \int_{-1}^1 Q(t)dt \right| \leq \int_0^\pi |Q(e^{i\theta})|d\theta$$

8) Pour $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ montrer que : $X^\top H X \leq \int_0^\pi |P_X(e^{i\theta})|^2 d\theta$.

9) En déduire que $X^\top H X \leq \pi \|X\|^2$.

10) On veut faire varier n , on note désormais $H_n \in S_n(\mathbb{R})$ la matrice définie dans le préambule et ρ_n sa plus grande valeur propre.

Montrer que la suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ est croissante et convergente.

Problème

Oscillations linéaires et un théorème ergodique

D'après Mines PC 2011

On désigne par \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels et par \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{C}^k([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R}^n . Pour chaque fonction $x \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$, on notera $x'(t)$ la dérivée première de x au point t et $x''(t)$ sa dérivée seconde.

On désignera $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues qui sont 2π -périodiques, c'est-à-dire les fonctions $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t + 2\pi) = h(t)$$

On désigne par $\langle ; \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique de \mathbb{R}^n . On identifiera chaque vecteur x de \mathbb{R}^n à un vecteur colonne, encore noté x , de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour x, y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a donc

$$\langle x; y \rangle = x^\top y$$

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de taille n . Dans tout le sujet, on considère deux matrices A et K de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I. Oscillations d'un certain système linéaire

- 1) Prouver que la matrice A est inversible.
- 2) Montrer que la matrice A^{-1} est symétrique.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose : $(x; y)_A = \langle Ax; y \rangle$. On désigne par u l'endomorphisme de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n défini par $\forall x \in \mathbb{R}^n, u(x) = A^{-1}Kx$.

- 3) Prouver que $(;)_A$ définit un produit scalaire de \mathbb{R}^n . Puis montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (u(x); y)_A = (x; u(y))_A$$

- 4) Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^n et n réels strictement positifs $\lambda_i \in \mathbb{R}^{++}$ ($1 \leq i \leq n$) tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, u(e_i) = A^{-1}K e_i = \lambda_i e_i$$

Dans la suite, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$.

On considère l'équation différentielle :

$$\forall t \in [0, +\infty[, Ax''(t) = -Kx(t) \tag{1}$$

de fonction inconnue $x \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$

- 5) Montrer que $x \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si il existe $2n$ nombres réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, x(t) = \sum_{i=1}^n (a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)) e_i$$

En déduire que l'ensemble des solutions de (1) est un espace vectoriel de dimension finie dont on précisera la dimension.

6) Soient $x, y \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$. Prouver que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \frac{d}{dt}(\langle Ax; y \rangle)(t) = \langle Ax'(t); y(t) \rangle + \langle Ax(t); y'(t) \rangle$$

7) Soit $x \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$ une solution de l'équation différentielle (1). Pour chaque réel $t \geq 0$ on pose, $T(x)(t) = \frac{1}{2} \langle Ax'(t); x'(t) \rangle$ et $U(x)(t) = \frac{1}{2} \langle Kx(t); x(t) \rangle$. Montrer alors que la quantité $T(x)(t) + U(x)(t)$ ne dépend pas de $t \in [0, +\infty[$.

Les solutions de (1) interviennent en physique; l'objet de la partie III est d'étudier leur comportement quand $t \rightarrow +\infty$ dans le cas $n = 2$. Les quantités $T(x)(t)$ et $U(x)(t)$ représentent respectivement une énergie cinétique et une énergie potentielle.

II. Résultats intermédiaires.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On désigne par c_k le réel positif tel que : $c_k \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt = 1$.

Pour tout réel t on pose $R_k(t) = c_k \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k$.

8) Calculer $\int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k \sin t dt$. En déduire que $c_k \leq \frac{k+1}{4}$.

On pourra poser le changement de variable $u = \cos t$.

9) Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$. On pose : $d_k(\varepsilon) = \sup_{t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]} R_k(t)$. Prouver alors que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d_k(\varepsilon) = 0$$

10) a) Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Montrer que g est bornée. On notera alors $\|g\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|$.

b) Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$, et $k \in \mathbb{N}$. Prouver que pour toute $h \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ qui est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et tout réel u , on a :

$$\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt = \int_0^{2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)dt_1, \text{ et}$$

$$\left| \int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt - h(u) \right| \leq 2 \|h'\| \varepsilon + 4\pi \|h\| d_k(\varepsilon).$$

On rappelle que $\int_0^{2\pi} R_k(t_1) dt_1 = 1$.

Pour établir l'inégalité, on pourra utiliser que $h(u-t_1) = h(u-t_1+2\pi)$ lorsque $t_1 \in [2\pi - \varepsilon, 2\pi]$

III. Un théorème ergodique.

Dans toute la suite on se limite au cas $n = 2$ de la partie I.

- 11) Soit $x \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathbb{R}^2)$ une solution de l'équation (1). Montrer qu'il existe quatre réels $c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2$ tels que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, x(t) = \sum_{i=1}^2 c_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e_i \quad (2)$$

(On rappelle que les deux vecteurs e_1, e_2 sont introduits dans la Question 4).

Dans la suite on fixe deux réels φ_1, φ_2 et on pose :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \theta(t) = (\omega_1 t + \varphi_1, \omega_2 t + \varphi_2) \quad (3)$$

Jusqu'à la fin de l'énoncé, on suppose que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ n'est pas un nombre rationnel. On suppose donc qu'il n'existe pas d'entiers naturels $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_1}{m_2}$.

On désigne par $\mathcal{C}_{2\pi, 2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, f(\theta_1 + 2\pi, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_2 + 2\pi)$$

On désigne par $\mathcal{C}_{2\pi, 2\pi}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}_{2\pi, 2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ qui sont de classe \mathcal{C}^1 .

- 12) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi, 2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$.

- a) Prouver que f est bornée et que $(\theta_1, \theta_2) \mapsto |f(\theta_1, \theta_2)|$ atteint sa borne supérieure sur \mathbb{R}^2 .

Avec les notations de la question précédente, on posera $\|f\| = \sup_{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2} |f(\theta_1, \theta_2)|$.

- b) Montrer que $\theta_2 \mapsto \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1$ est continue sur \mathbb{R} .

On pose alors :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 \right) d\theta_2$$

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 (Théorème Ergodique) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi, 2\pi}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. Alors,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t) dt = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (4)$$

(On rappelle que $\theta(t)$ est défini dans (3) et que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ n'est pas un nombre rationnel).

- 13) Soit $j, \ell \in \mathbb{Z}$. Prouver le Théorème Ergodique dans le cas particulier de la fonction $(\theta_1, \theta_2) \mapsto f(\theta_1, \theta_2) = e^{i\theta_1 j} e^{i\theta_2 \ell}$.

Dans le cas où $(j, \ell) \neq (0, 0)$ on pourra vérifier que $j\omega_1 + \ell\omega_2$ est non nul puis on pourra calculer séparément chaque membre de (4) dans ce cas particulier

Dans les trois questions suivantes on fixe un élément quelconque $f \in \mathcal{C}_{2\pi, 2\pi}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, f_k(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) R_k(v - \theta_2) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

14) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver qu'il existe $(2k+1)^2$ nombres complexes $(a_{j,\ell})_{-k \leq j, \ell \leq k}$ tels que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$: $f_k(u, v) = \sum_{-k \leq j, \ell \leq k} a_{j,\ell} e^{iuj} e^{iv\ell}$.

Justifier que la fonction f_k vérifie le Théorème Ergodique.

15) Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. En écrivant $f_k(u, v) - f(u, v)$ comme somme de deux termes et en appliquant la Question 10, prouver que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f_k(u, v) - f(u, v)| \leq 2\varepsilon \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 8\pi \|f\| d_k(\varepsilon)$$

On rappelle que $\|f\|$ est défini dans la Question 12.

16) Prouver le Théorème Ergodique pour la fonction f .

On pourra poser $M = 2 \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 8\pi \|f\|$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on pourra choisir $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $d_k(\varepsilon) < \varepsilon$. Ensuite, on pourra appliquer la Question 14 à f_k et considérer $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T (f_k \circ \theta)(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right| < \varepsilon$$

17) On considère la solution $x(t) = \sum_{i=1}^2 \cos(t\omega_i + \varphi_i) e_i$ de (1) obtenue en prenant $c_1 = c_2 = 1$ dans (2). Soit Ω un ouvert non vide de $\{ue_1 + ve_2 / u, v \in]-1, 1[\}$. Prouver qu'il existe $t \in [0, +\infty[$ tel que $x(t) \in \Omega$.

On pourra raisonner par l'absurde et justifier alors l'existence d'une fonction Φ telle que $\Phi(\theta(t))$ est nulle pour tout $t \in [0, +\infty[$. On pourra chercher une telle fonction sous la forme $\Phi : (\theta_1, \theta_2) \mapsto \Phi_1(\theta_1)\Phi_2(\theta_2)$

Fin de l'épreuve.

Le Théorème Ergodique dit que la moyenne temporelle de la grandeur physique f coïncide avec la moyenne spatiale de f . Il s'agit de l'hypothèse ergodique du physicien Boltzmann. La Question 17 est alors une illustration du fait que toute trajectoire du système (hamiltonien) ergodique rencontre tout ouvert de l'espace des phases.