Devoir Surveillé 8 (3 heures)

Dans tout le problème, $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire euclidien canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme $\|\ \|$ associée.
Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et si $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}^n$.
Si $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, la différentielle de f au point p de Ω est notée $\mathrm{d}f_p$; sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^n$ est appelée *matrice jacobienne de f en p* et est notée $\mathrm{Jac}\, f(p) \in \mathscr{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.
Si f est dans $\mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, on dit que f vérifie (1) si et seulement si :

$$(1) \qquad \forall (x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 1$$

On note $\mathscr{P}_2$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$(x,y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \qquad \text{où} \qquad (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6.$$

Le but principal du problème est de montrer que les solutions de (1) sur $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $\mathscr{P}_2$.

Partie I - Les équations de Cauchy-Riemann

Soient f et g dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On suppose que f, g vérifient les équations de Cauchy-Riemann c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

On définit deux fonctions sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note E_n l'espace des fonctions f de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad t^2 f''(t) + t f'(t) - n^2 f(t) = 0$$

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit φ_α la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_\alpha : t \mapsto t^\alpha$

   a) Déterminer E_0.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, déterminer les réels α tels que φ_α appartienne à E_n.
   c) En déduire E_n pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2) a) Exprimer $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de r, θ, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

   b) Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, montrer $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = \dfrac{1}{r} \times \dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial r} = -\dfrac{1}{r} \times \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$.

3) Pour $n \in \mathbb{Z}$, soient $c_{n,f}$ et $c_{n,g}$ les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} c_{n,f}(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r,\theta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\, \mathrm{d}\theta \\ \\ c_{n,g}(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(r,\theta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\, \mathrm{d}\theta \end{cases}$$

a) Montrer que $c_{n,f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$(c_{n,f})' : r \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\, e^{-in\theta} d\theta$$

b) En déduire que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (c_{n,f})'(r) = \frac{\mathrm{i}n}{r}\, c_{n,g}(r)$$

c) Montrer que $c_{n,f}$ appartient à E_n et que $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0. En déduire l'existence de $a_n \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \qquad c_{n,f}(r) = a_n\, r^{|n|}$$

On admet que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$f(r,\theta) = \lim_{p \to \infty} \sum_{n=-p}^{p} a_n r^{|n|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

4) Dans cette question, on suppose que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

a) Si $n \in \mathbb{Z}$, montrer que la fonction $(c_{n,f})'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont constantes.

Partie II - Un critère de bijectivité

Dans cette partie on considère $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. On suppose que pour tout $(p,h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$\langle \mathrm{d}F_p(h), h \rangle \geqslant \alpha \|h\|^2$$

Le but de cette partie est de montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

5) Soit x une fonction continue sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ et $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que

$$L\left(\int_0^1 x(t)dt\right) = \int_0^1 L(x(t))dt$$

6) Soient p et q dans $\mathbb{R}^2$.

a) Vérifier :

$$F(q) - F(p) = \int_0^1 \mathrm{d}F_{p+t(q-p)}(q-p)\, \mathrm{d}t$$

b) Montrer :

$$\langle F(q) - F(p), q - p\rangle \geqslant \alpha \|q - p\|^2$$

7) Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et G l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{R}^2, \qquad G(p) = \|F(p) - a\|^2$$

a) Si p et h sont dans $\mathbb{R}^2$, calculer $\mathrm{d}G_p(h)$.

b) Montrer que $G(p) \to +\infty$ quand $\|p\| \to +\infty$.

c) En déduire que G atteint un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ en un point p_0.

d) Montrer que $F(p_0) = a$.

8) Montrer que F est bijective $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

On admet que F^{-1} est encore de classe $\mathscr{C}^1$.

Partie III - Le théorème de Jörgens

Soit f dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soient :

$$u(x, y) = x + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad v(x, y) = y + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

On suppose dans les questions 9 et 10 que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

9) Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathrm{Jac}\, F(x, y) - I_2 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive.

En déduire que F vérifie les hypothèses de la partie II.

Ainsi F est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et F^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.

Dans la suite, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose :

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad t(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

de sorte que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x, y) > 0$ et $r(x, y)\, t(x, y) - s(x, y)^2 = 1$.

10) Soient $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g : (x, y) \mapsto x - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad h : (x, y) \mapsto -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

On considère $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$G : (x, y) \mapsto (g(x, y), h(x, y))$$

On pose $\Phi = G \circ F^{-1}$ et, pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$\Phi(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

Ainsi, comme $G = \Phi \circ F$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$G(x, y) = (g(x, y), h(x, y)) = \Phi((u(x, y), v(x, y)) = (\varphi(u(x, y), v(x, y)), \psi(u(x, y), v(x, y)))$$

a) Justifier que φ et ψ sont de classe $\mathscr{C}^1$.

b) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) = F(x, y)$, donner une relation entre les matrices jacobiennes $\operatorname{Jac} F(x, y)$, $\operatorname{Jac} \Phi(u, v)$ et $\operatorname{Jac} G(x, y)$.

c) Exprimer les dérivées partielles premières au point (u, v) de φ et ψ, qu'on notera $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \ldots$ en fonction de $r(x, y), s(x, y), t(x, y)$ (qu'on abrègera en r, s, t).

11)

a) Montrer qu'il existe deux fonctions φ et ψ dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(u(x, y),\, v(x, y)\right) = x - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \\ \psi\left(u(x, y),\, v(x, y)\right) = -y + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} \right.$$

b) Calculer :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(u(x, y), v(x, y)\right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(u(x, y), v(x, y)\right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}\left(u(x, y), v(x, y)\right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial v}\left(u(x, y), v(x, y)\right)$$

(que l'on abrégera en $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}, \dfrac{\partial \psi}{\partial u}, \dfrac{\partial \psi}{\partial v}$) en fonction de $r(x, y)$, $s(x, y)$ et $t(x, y)$ (que l'on abrégera en r, s, t).

c) Montrer que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

d) Montrer, en utilisant la première partie, que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont constantes.

e) En déduire que r, s et t sont constantes.

12) Montrer que les seules fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $\mathscr{P}_2$.