Semaine 21 - du 23 au 27 mars

Calcul différentiel

Dérivées partielles et différentielle

Dérivées selon un vecteur

Dérivées partielles par rapport à une base de E

Soit $f : U \to F$ (où U est un ouvert de E avec E et F espaces vectoriels de dimension finie) et $a \in U$, elle est différentiable en a s'il existe une application linéaire (nécessairement unique) notée $\mathrm{d}f_a$ telle que : $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + o(h)$.

Application différentielle : $\mathrm{d}f : a \mapsto \mathrm{d}f_a(h)$

Notation $\mathrm{d}f_a.h$

Expression de la différentielle dans une base à l'aide des dérivées partielles : $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$

Matrice jacobienne

Gradient d'une application numérique définie sur un ouvert d'un espace euclidien : $\mathrm{d}f_a(h) = (\nabla f(a)|h)$

Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Une application f est de classe $\mathscr{C}^1$ si elle est différentiable et que sa différentielle $\mathrm{d}f$ est continue.

Une application est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si elle admet des dérivées partielles (par rapport à une base) continues.

Opérations sur les applications différentiables / de classe $\mathscr{C}^1$

Combinaisons linéaires

Différentiabilité de $B(f,g)$ où f et g sont différentiables et B bilinéaire

Différentiabilité d'une composée de fonctions différentiables : règle de la chaine. *On a traité en exemple des résolutions d'équations différentielles aux dérivées partielles d'ordre* 1.

Dérivée le long d'un arc

Théorème fondamental de l'analyse : Soit f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U connexe par arc et γ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans U,

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\mathrm{d}t$$

Vecteurs tangents à une partie

Pour $X \subset E$, un vecteur $v \in E$ est dit tangent à X à $a \in X$ s'il existe un arc $\gamma : I \to X$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Notation T_xX pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

Cas des surfaces

Si $g \in \mathscr{C}^1(U, \mathbf{R})$ et $X = g^{-1}(\{0\})$. Pour $x \in X$ tel que $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, $T_xX = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}g(x))$.

Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Définition

Théorème de Schwarz

Exemples d'équations différentielles aux dérivées partielles.

Opérations algébriques