Sujet 5

Exercice 1 - CCP 73 : On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(I_2, A)$.

Exercice 2 : Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Trouver le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 e^{-u^2}\,\mathrm{d}u}{1+u^2/x}$. En déduire un équivalent simple de $f'(x)$ pour x tendant vers $+\infty$.
4. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f. On n'essayera pas de la résoudre.
5. En déduire un développement asymptotique de f à deux termes en $+\infty$.
6. Tracer la courbe de f.

Sujet 6

Exercice 1 - CCP 79 : Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$.

   On pose : $\forall\ (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2 :

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.
   (a) Comparer $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}\,(A^\top A)$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(AA^\top) = \mathrm{Im}A$
2. On considère $\mathbf{R}^n$ avec le produit scalaire usuel noté $(.|.)$. Soit $\mathscr{F} = (x_1,\dots,x_q)$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On considère $\Gamma(x_1,\dots,x_q) \in \mathscr{M}_q(\mathbf{R})$ la matrice dont le coefficient ligne i et colonne j est $(x_i|x_j)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{rg}(\Gamma(x_1,\dots,x_q)) = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$.
   (b) Montrer que $\det(\Gamma(x_1,\dots,x_q)) \geqslant 0$ et que $\det(\Gamma(x_1,\dots,x_q)) = 0$ si et seulement si la famille est liée.
   (c) Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que la caractérisation du cas d'égalité.

Sujet 7

Exercice 1 - CCP 22 :

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction

$$f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$$

La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?

En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

Exercice 2 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On pose

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que si $P \in \mathbf{R}[X]$ alors

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si B est diagonalisable alors A l'est aussi et en déduire que $A = 0$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Sujet 8

Exercice 1 - CCP 50 : On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $n \in \mathbf{N}$.

Soit $F : U \to \mathbf{R}$ où $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$ définie par

$$F(x,y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right).$$

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

On rappelle que l'on appelle alors laplacien de F et on note ΔF la fonction définie sur U par :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f pour que $\Delta F = 0$.
3. Résoudre $\Delta F = 0$ pour $n = 0$ et $n = 1$.

MP2 — **Préparation à l'oral** — 2025 – 2026

Sujet CCINP - Mines Telecom

Sujet 9

Exercice 1 - CCP 33 : On pose : $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si u est nilpotent alors $\lambda u - \mathrm{id}_E$ est inversible pour tout complexe non nul λ.

Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u et v commutent et que u est nilpotent.

2. (a) Prouver que v est inversible si et seulement si $u+v$ est inversible. On pourra écrire $u+v$ en fonction d'une composée de deux endomorphismes.
   (b) Montrer que $\det(u+v) = \det(v)$.

Sujet 10

Exercice 1 - CCP 99 :

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que : $\forall\, a \in \,]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** :
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

Exercice 2 : Soit $(.|.)$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$).

Soit $f \in S^+(\mathbf{R}^n)$ un endomorphisme autoadjoint défini positif.

1. Soit $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$.
   (a) Montrer l'existence et donner une expression des dérivées partielles de g.
   (b) Montrer que g a un unique point critique noté z.
   (c) Montrer que g admet un minimum en z.