Sujet 7

Soit ϕ une fonction continue T périodique ($T > 0$). On pose

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\phi(t)dt.$$

1. Justifier que F est définie sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Étudier la limite de F en $+\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
4. Montrer que

$$F(x) = \frac{1}{1 - e^{-Tx}} \int_0^T e^{-xt}\phi(t)dt.$$

En déduire un équivalent de F en 0.

On commencera par le cas où $\displaystyle\int_0^T \phi(t)dt \neq 0$

Sujet 8

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que pour tout $S \in G$, $S^2 = I_n$.

1. Montrer que G est abélien.
2. (a) Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables.

   (b) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que

   $$\forall S \in G, P^{-1}SP \in \mathrm{D}_n(\mathbf{C})$$

   où $\mathrm{D}_n(\mathbf{C})$ désigne l'ensemble des matrices diagonales.

   On pourra procéder par récurrence sur n.
3. Montrer que G est de cardinal fini et donner une majoration de $\mathrm{Card}(G)$ en fonction de n.
4. En déduire que si $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_m(\mathbf{C})$ alors $n = m$.

Sujet 9

On pose
$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x\tan t)}{\tan t} dt$$

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. Calculer F.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan t} dt$ puis $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$.
