

Sujet 1

Exercice 1 - CCP 62 : Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
 - (a) en utilisant le lemme des noyaux ;
 - (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
 2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.
 3. Montrer que les séries de termes généraux $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n divergent.
 4. Montrer que pour tout entier n , $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et que la suite (nu_n) est croissante. On note ℓ sa limite.
 5. En considérant $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ pour un α bien choisi, déterminer ℓ .
-

Sujet 2

Exercice 1 - CCP 78 : Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E . On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
 - (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2 (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
 - (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi \circ , est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Exercice 2 : Soit $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, on pose $b_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

On note $a_n = b_{n,n}$ et on considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

1. Montrer que pour tout entiers p et q avec p non nul, $b_{p,q} = \frac{p}{q+1} b_{p-1,q+1}$.
 2. En déduire que pour tout entier n , $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière.
 3. Calculer la somme de la série sur l'intervalle ouvert de convergence.
-

Sujet 3

Exercice 1 - CCP 75 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de \mathbf{R}^2 canoniquement associé à A .

Trouver une base (v_1, v_2) de \mathbf{R}^2 dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

On donnera explicitement les valeurs de a , b et c .

3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exercice 2 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} . Soit F le sous-espace vectoriel des fonctions qui s'annulent en 0 et en 1. On considère sur E les normes N_∞ et N définies par $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

et $N(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. Justifier que N_∞ est une norme.
 2. Les deux normes sont-elles équivalentes ?
 3. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F pour N_∞ .
 4. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F pour N .
-

Sujet 4

Exercice 1 - CCP 63 : Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note u^* l'adjoint de u .

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.

ii. $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.

iii. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice 2 : Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \arctan(x+n) - \arctan(n)$. On rappelle la formule :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple. On notera f la limite.

2. Montrer que la série de fonctions converge uniformément sur tout segment $[a, b]$. Justifier que la série ne converge pas uniformément sur $] -\infty, 0]$.

3. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} .

4. Déterminer une relation simple entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

5. En déduire la limite de f en $+\infty$. On pourra étudier la nature de la série de terme général $f(n+1) - f(n)$.
