

Sujet 1

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et d un endomorphisme de E dont on suppose qu'il vérifie :

$$\forall (f, g) \in E^2, d(f.g) = f.d(g) + g.d(f).$$

dans l'égalité ci-dessus les points désignent le produit et pas la composition.

On veut montrer qu'il existe $u \in E$ telle que pour tout f de E , $d(f) = u.f'$.

1. Soit $f \in E$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction $\varphi_f : x \mapsto \int_0^1 f'(xt)dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ et que pour tout x dans \mathbf{R} , $f(x) = x.\varphi_f(x)$.
 2. Soit $a \in \mathbf{R}$ et $(f, g) \in E^2$ tels que $f'(a) = g'(a)$. Montrer que $d(f)(a) = d(g)(a)$.
On pourra commencer par le cas $a = 0$.
 3. Conclure en montrant qu'il existe $u \in E$ telle que pour tout f de E , $d(f) = u.f'$.
-

Sujet 2

Soit n un entier au moins égal à 1. On pose

$$P_n = nX^n - (X^{n-1} + \dots + X + 1)$$

et

$$A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$

1. Montrer que $(X - 1)P_n = A_n$.
 2. Montrer que 1 est racine double de A_n et que toutes les autres racines sont simples.
 3. Montrer que si z est une racine complexe de P_n distincte de 1 alors $|z| < 1$.
 4. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ telle que $P_n(A) = 0$. Montrer que la suite (A^k) converge.
-

Sujet 3

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. On pose

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt ; N_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| ; N(f) = |f(0)| + N_\infty(f').$$

On admet que ce sont des normes

1. Comparer ces normes et étudier leur équivalence.
 2. On pose $U = \{f \in E \mid \forall t \in [0, 1], f(t) > 0\}$. Étudier si U est un ouvert par chacune de ces normes.
-

Sujet 4

1. Montrer qu'un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est auto-adjoint.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que

$$\forall X \in \mathbf{R}^n, \|AA^T X\| = \|A^T X\|$$

où \mathbf{R}^n est muni du produit scalaire usuel.

- (a) Montrer que pour tout $(X, Y) \in (\mathbf{R}^n)^2$, $(AA^T X | AA^T Y) = (A^T X | A^T Y)$.
 - (b) Montrer que AA^T est le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(A)$.
-

Sujet 5

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . Soit $P = X^2 + \alpha X + \beta$ un polynôme à coefficients réels ne possédant pas de racines réelles.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$.

On veut montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f ne possède pas de valeurs propres réelles et que n est pair.
2. Soit $x \neq 0$ et $y = f(x) + \alpha x$. Montrer que $H = \text{Vect}(x, y)$ est un plan stable par f .
3. Démontrer le résultat.

On pourra introduire un sous-espace stable de f de dimension maximale dans lequel l'endomorphisme induit possède dans une base bien choisie une matrice de la forme souhaitée.

Sujet 6

Soit n et m deux entiers non nuls.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$. Montrer que $M^T M$ est diagonalisable et $\text{Sp}(M^T M) \subset \mathbf{R}_+$.
2. Soit A_1, \dots, A_m des parties de $[[1; n]]$ telles que
 - $\forall i \in [[1; m]], \text{Card}(A_i) = a$
 - $\forall (i, j) \in [[1; m]]^2, \text{Card}(A_i \cap A_j) = b$

où $a > b$.

Montrer l'inégalité de Fisher : $m \leq n$.

On pourra considérer la matrice $B = (b_{ij})$ où $b_{ij} = 1$ si $i \in A_j$ et 0 sinon.
