
Exercices de mathématiques

Partie I

Séries numériques

1 Applications du cours

A Séries à termes positifs, comparaisons du terme général, équivalents

□ **Exercice 1** Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{2^n \ln n}{\operatorname{sh}(n)}$.

□ **Exercice 2** Déterminer la nature des séries de terme général : $u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!}$.

□ **Exercice 3** Déterminer la nature des séries de terme général : $u_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!}$, $v_n = \frac{n^n}{e^n n!}$.

□ **Exercice 4**

1) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = n \int_0^1 (t(1-t))^n dt$.

2) Déterminer la nature de la série $v_n = n \int_0^1 (t(1-t))^n f(t) dt$, où f est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$.

□ **Exercice 5** Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \int_n^{2n} \frac{1}{1+t\sqrt{t}} dt$.

□ **Exercice 6** Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$

b) $\frac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} n}$

c) $\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}$

d) $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$

e) $2 \ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n^2 + 1)$

f) $\frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$

g) $(1 + \sqrt{n})^{-n}$

h) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

i) $\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 3n}$

j) $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

k) $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

l) $\frac{(n)^{\ln n}}{(\ln n)^{\ln n}}$

□ **Exercice 7** Déterminer, en fonction de la valeur des paramètres, la nature des séries de terme général :

$$\begin{array}{ll} a) \quad \operatorname{ch}^\alpha n - \operatorname{sh}^\alpha n \quad (\alpha \in \mathbb{R}) & b) \quad \frac{a^{\sqrt{n}}}{n^\alpha} \quad (a > 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}) \\ c) \quad [\ln(\operatorname{sh}(n^\alpha))]^{\frac{1}{\alpha}} - n \quad (\alpha > 0) & d) \quad (\ln(2n+1))^\alpha - (\ln(2n))^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ e) \quad \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \quad (a > 0 \text{ et } b > 0) & f) \quad \left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^n \quad (\alpha > 0) \end{array}$$

□ **Exercice 8** Étudier la nature des séries de terme général :

$$\begin{array}{lll} a) \quad \frac{1}{(\ln 2)^2 + \dots + (\ln n)^2} & b) \quad e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{n}} & c) \quad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \\ d) \quad \ln(\operatorname{th} n) & e) \quad \arcsin \frac{2n}{4n^2+1} & f) \quad n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \\ g) \quad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}} & h) \quad (\arctan \sqrt{n})^{-\ln n} & i) \quad \left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^n - 1 \\ j) \quad \sin \pi(2 - \sqrt{3})^n & k) \quad \sin \pi(2 + \sqrt{3})^n & \end{array}$$

□ **Exercice 9** Pour tout $n \geq 1$ on pose $w_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+n)^2}$. Justifier que la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

□ **Exercice 10** Nature de la série de terme général u_n avec : $u_n = \sqrt[3]{n^4 + n^3} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx$.

□ **Exercice 11** Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes dans $[0, +\infty[$.

- 1) Montrer que $\sum u_n v_n$ est aussi convergente.
- 2) On suppose de plus que les suites u_n et v_n sont à valeurs dans $]0, +\infty[$. Montrer que $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ est convergente.

□ **Exercice 12** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes dans $[0, +\infty[$. Déterminer la nature de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$.

□ **Exercice 13**

- 1) Soit une série $\sum u_n$ à termes positifs convergente. Montrer que $\sum u_n^3$ est convergente.
- 2) On suppose que $\forall n \geq 0, a_n \geq 0, b_n \geq 0$, et que $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ sont convergentes. Montrer que $\sum a_n b_n$ est convergente.
- 3) On suppose que $\forall n \geq 0, a_n \geq 0, b_n \geq 0$, et que $\sum a_n^3$ et $\sum b_n^3$ sont convergentes. Montrer que $\sum (a_n + b_n)^3$ est convergente.

□ **Exercice 14** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs.

- 1) Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge. Que dire de la réciproque ?
- 2) Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n^2$ converge. Que dire de la réciproque ?

□ **Exercice 15** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

- 1) Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
- 2) Montrer que si la série $\sum v_n$ converge et si la suite (u_n) est majorée, alors $\sum u_n$ converge.
- 3) Si la série $\sum v_n$ converge, peut-on affirmer que $\sum u_n$ converge ?

B Comparaison à une intégrale

□ **Exercice 16** (Séries de Bertrand)

Nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ en discutant sur les paramètres réels α et β .

□ **Exercice 17** Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$.

□ **Exercice 18** Déterminer, en fonction du paramètre, la nature des séries de terme général :

$$a) \quad n^a \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \quad (a \in \mathbf{R}) \quad b) \quad n^a \ln(n!) \quad (a \in \mathbf{R}) \quad c) \quad n^a \sum_{k=1}^n (\ln k)^2 \quad (a \in \mathbf{R})$$

□ **Exercice 19**

1) Soit $\alpha > 1$. On pose $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2) Si $\alpha < 1$, déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$

□ **Exercice 20** Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n}^{n^2} \frac{1}{p \ln(p)}$.

C Théorème des séries alternées

□ **Exercice 21** Nature de la série de terme général $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

□ **Exercice 22** Déterminer une approximation rationnelle par excès et une approximation rationnelle par défaut de $\frac{1}{e}$ à 10^{-2} près.

□ **Exercice 23** Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\frac{1}{n+1} \leq \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n(-1)^k}{k} \right| \leq 1$.

□ **Exercice 24** Etablir l'existence de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour tout x dans $[0, 1]$.

Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbf{N}^*, \left| S(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

D Convergence absolue

□ **Exercice 25** Déterminer la nature des séries de terme général :

$$a) \quad \frac{n^\alpha \sin(n)}{2^n} \quad b) \quad \frac{n \cos(n)}{(\ln n)^n}$$

E Usage de développements asymptotiques

□ **Exercice 26** Déterminer la nature des séries de terme général

$$\begin{array}{lll} a) \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}} & b) \sin(\pi\sqrt{1+n^2}) & c) \tan(\pi\sqrt{1+n^2}) \\ d) \frac{(-1)^n}{n + \cos(n)} & e) \frac{(-1)^n}{n + e^{in}} & f) (-1)^n \sqrt{n} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \\ g) \exp\left((-1)^n \frac{\ln n}{n}\right) - 1 & h) \cos\left(\pi n^2 \ln \frac{n-1}{n}\right) & i) \ln\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) \end{array}$$

□ **Exercice 27** Dans les deux cas suivants, déterminer des réels a et b pour que la série soit convergente et calculer alors la somme

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} \quad v_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$$

□ **Exercice 28** Déterminer, en discutant selon la valeur du paramètre, la nature de la série de terme général :

$$a) \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right) \quad (a > 0) \quad b) \frac{(-1)^n}{n^\alpha(\sqrt{n} + (-1)^n)} \quad (\alpha \in \mathbf{R}) \quad c) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - 1 \quad (\alpha > 0)$$

□ **Exercice 29** Soit $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 2})$. Étudier la convergence absolue et la convergence de la série $\sum u_n$.

F Sommation des relations de comparaison

□ **Exercice 30** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n}\right)^{-n^3}$.

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

2) Déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 31** Soit $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n puis donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

□ **Exercice 32** (Développement asymptotique de la série harmonique)

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on définit : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, et $u_n = S_n - \ln(n)$.

1) Effectuer un développement limité à l'ordre 2 sur l'échelle des puissances de $\frac{1}{n}$ de $u_n - u_{n-1}$. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel que l'on notera γ puis que

$$S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

2) En utilisant le principe de sommation des relations de comparaisons, trouver un équivalent simple, noté a_n , de $u_n - \gamma$.

3) Soit $v_n = u_n - \gamma - a_n$. Trouver, par le même principe, un équivalent de v_n .

En déduire que

$$S_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

□ **Exercice 33** On considère la suite récurrente : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - u_n^2 \\ u_0 \in]0, 1[\end{cases}$

1) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite .

2) On pose : $a_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ pour $n \geq 1$.

Déterminer un réel α pour que la suite (a_n) converge vers une limite ℓ non nulle. En déduire un équivalent simple de u_n . On notera v_n cet équivalent.

3) On pose : $b_n = a_n - \ell$ pour $n \geq 1$.

Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n b_k$, en déduire un développement asymptotique de u_n à deux termes plus un reste.

G Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

□ **Exercice 34** Étude de la convergence et calcul de la somme de la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$, où x est un réel.

□ **Exercice 35** Étude de la convergence et calcul de la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

H Calculs de sommes

□ **Exercice 36** Calculer la somme des séries de terme général

$$\begin{array}{lll} a) \frac{4n-3}{n(n^2-4)} & b) \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) & c) \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \\ d) \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) & e) \frac{1}{n^3-n} & f) \frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2} \end{array}$$

□ **Exercice 37** Soit θ un réel. Calculer la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2 - 2n \cos(\theta) - \sin^2(\theta)}$

□ **Exercice 38** Montrer que pour $x > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$. En déduire la somme de la série $\sum \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

□ **Exercice 39** Soit $u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$. Justifier la convergence de la série de terme général u_n .

Calculer la somme en décomposant en éléments simples, et en se ramenant à la somme d'une autre série.

□ **Exercice 40** Soit $a > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n!} \int_1^a (\ln t)^n dt$.

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

2) Calculer sa somme par deux méthodes : l'une utilisant un théorème d'intégration termes à termes d'une série de fonctions, l'autre non.

I Etude d'une suite à l'aide d'une série

□ **Exercice 41** Soit $a_n = \int_0^{2\pi} e^{-t} \sin^{2n}(t) dt$.

1) Déterminer une relation entre a_n et a_{n-1} .

2) Soit $b_n = V_n - V_{n-1}$ avec $V_n = \ln(n^\gamma a_n)$. Déterminer une valeur de γ pour que la série de terme général b_n soit convergente.

3) En déduire un équivalent de a_n .

□ **Exercice 42** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs ou nuls. Soit u_0 un réel strictement positif. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

2 Exercices plus élaborés

A Séries à termes positifs, comparaisons du terme général, équivalents

□ **Exercice 43** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t}{1+t} dt$. Déterminer en fonction de α la nature de $\sum u_n$.

□ **Exercice 44**

1) Calculer $\sin(\arccos x)$ pour $x \in [-1, 1]$.

2) Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \arccos\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$

□ **Exercice 45** Étudier la nature de la série de terme général : $u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

□ **Exercice 46** Étudier, en fonction de $a \geq 0$, la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \int_n^{n+1} \ln x dx - \ln(n+a)$.

B Comparaison à une intégrale

□ **Exercice 47** Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $u_n = \frac{S_n}{n^\alpha}$ où $S_n = \sum_{k=1}^n (\ln k)^2$.

□ **Exercice 48** Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(1+k)}{\sqrt{k}}$.

□ **Exercice 49** Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)}$. Justifier son existence et déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

C Théorème des séries alternées

□ **Exercice 50** Nature de la série de terme général : $u_n = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right|^{\ln n}$

□ **Exercice 51**

1) Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente.

Démontrer que si elle est à termes positifs, ou si elle relève du théorème des séries alternées, alors $\sum u_n^3$ est une série réelle convergente.

2) Soit la série $\sum u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad u_{3n} = \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \quad , \quad u_{3n+1} = u_{3n+2} = \frac{-1}{\sqrt[3]{n+1}}$$

Montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum u_n^3$ diverge.

D Usage de développements asymptotiques

- **Exercice 52** Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $u_0 \in \mathbf{R}$, et $\forall n \geq 1, u_n = \frac{(-1)^n}{n} \cos(u_{n-1})$.
- **Exercice 53** On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par :

$$u_n = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(n^2 + n + 1) - \ln(n^2 + 1)}$$

- 1) Montrer l'existence de u_n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
- 2) Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

E Sommation des relations de comparaison

- **Exercice 54** Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, avec $\ell \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

- 1) Si $\ell \in [0, 1[$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ en fonction de u_{n+1} .
- 2) Si $\ell > 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de u_n .
- 3) Déterminer des équivalents simples de : $\sum_{k=1}^n \frac{\text{ch}(k)}{k}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k \text{ ch}(k)}$

- **Exercice 55** Donner un développement asymptotique à deux termes significatifs de la suite (x_n) définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \geq 0, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{x_n}}$.

- **Exercice 56** Soit la suite (u_n) telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

- 1) Déterminer la nature de (u_n) .
- 2) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
- 3) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n .

- **Exercice 57** On considère la suite récurrente : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n}{1+n x_n^2} \\ x_0 = a > 0 \end{cases}$

- 1) Démontrer que cette suite est décroissante et converge vers 0.
- 2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = 2n + n^2 x_n^2$.
- 3) Démontrer que la suite $(n x_n)$ est bornée.
- 4) Déterminer un équivalent simple de x_n .

F Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

- **Exercice 58** Nature de la série de terme général : $u_n = \frac{\sin(\ln n)}{n}$.

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange sur une primitive de $f : t \mapsto \frac{\sin(\ln t)}{t}$.

G Calculs de sommes

- **Exercice 59** Convergence et calcul de la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(4n^2-1)}, n \geq 1$.

On pourra utiliser que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est un réel appelé la constante d'Euler.

□ **Exercice 60** Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$. Montrer que la série $\sum (-1)^n I_n$ est convergente et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

□ **Exercice 61** Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer la somme de la série de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$.

On pourra simplifier la suite $\delta_n = \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ en multipliant par $\sin(\theta)$ avec θ bien choisi. On peut aussi utiliser la forme $\cos(a)\cos(b)$ pour faire apparaître une somme de Riemann.

□ **Exercice 62** Soit $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$. Déterminer une relation de récurrence liant I_n et I_{n+2} . En déduire un équivalent de I_n .

□ **Exercice 63** Calculer la somme de la série déduite de la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ en prenant alternativement un terme positif et deux termes négatifs :

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \dots$$

H Transformation d'Abel

Le principe de la transformation d'Abel est détaillée dans l'exercice ci-dessous; les exercices suivants en sont des applications

□ **Exercice 64** (Transformation d'Abel) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des suites réelles ou complexes.

On pose pour $n \geq 1$: $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, et on rappelle que pour naturel $k > 0$, on a $b_k = B_k - B_{k-1}$, avec la convention (habituelle) $B_0 = 0$.

Montrer que pour tous naturels $q \geq p \geq 1$:

$$\sum_{k=p}^q a_k b_k = a_q B_q - a_p B_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

Pour $p = 1$, on obtient donc : $\forall q > 1, \sum_{k=1}^q a_k b_k = a_q B_q + \sum_{k=1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

□ **Exercice 65** On suppose que $\forall n > 0, a_n \geq 0$ et que $\sum a_n$ converge. On note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad ; \quad S_n = a_0 + \dots + a_n \quad ; \quad R_n = S - S_n$$

Montrer que les séries $\sum n a_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et qu'elles ont la même somme en cas de convergence.

□ **Exercice 66**

- 1) Montrer que la suite des sommes partielles de la série de terme général $\sin k$ est bornée.
- 2) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{\sin n}{\ln n}$?

□ **Exercice 67** Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels tendant vers 0. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \beta_n = n(\alpha_n - \alpha_{n+1})$$

Comparer les natures et les sommes éventuelles des séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$.

I Divers

□ **Exercice 68** (La Règle de Raabe-Duhamel) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \beta_n$ où la série $\sum \beta_n$ est absolument convergente et $\alpha > 0$.

1) Montrer que $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\alpha}{n} + w_n$ où $\sum w_n$ est absolument convergente

2) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.

On pourra utiliser que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

3) Conclure que $\sum u_n$ converge $\iff \alpha > 1$.

4) Soit $u_n = \sqrt{n!} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ ($n \geq 1$). Étudier la nature de la série $\sum u_n$, puis $\sum (-1)^n u_n$.

□ **Exercice 69** Nature des séries de termes généraux $u_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$

J Étude de suites à l'aide de séries

□ **Exercice 70** Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k} \end{cases}$$

1) Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$.

2) Exprimer u_k en fonction de u_{k-1} .

3) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 71** Étudier les suites récurrentes suivantes et donner un équivalent simple du terme général de chacune d'elles :

$$\begin{array}{ll} (1) \begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases} & (2) \begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2} \end{cases} \\ (3) \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{2} \end{cases} & (4) \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases} \end{array}$$

Après avoir étudié la suite, on pourra déterminer $\beta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\left(\frac{1}{u_k^\beta} - \frac{1}{u_{k-1}^\beta}\right)$ converge vers une limite finie non nulle.

□ **Exercice 72** Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$

1) Montrer que si la suite (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors la suite (a_n) aussi.

2) Réciproquement, on suppose que (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que la suite (u_n) n'est pas nécessairement convergente.

b) Montrer que (u_n) n'est pas nécessairement bornée.

c) Montrer que si (u_n) est monotone, alors (u_n) converge vers ℓ .

□ **Exercice 73** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

□ **Exercice 74** Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. On pose pour tout $n \geq 0$, $y_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$.

Montrer que si (x_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors la suite (y_n) converge également vers ℓ .

□ **Exercice 75**

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x - e^{-x} = n$ admet une unique solution notée u_n .
- 2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [n, n+1]$.
- 3) Déterminer un équivalent de u_n puis un équivalent de $u_n - n$.
- 4) Déterminer un développement asymptotique de u_n comportant trois termes significatifs.

□ **Exercice 76** Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

- 1) Démontrer qu'il existe un unique réel x_n tel que : $f_n(x_n) = 0$.
- 2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in [0, \frac{1}{n}]$.
- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x_n$ et en déduire un équivalent simple de x_n .
- 4) a) Déterminer un équivalent simple de $x_n - \frac{1}{n}$.
b) Déterminer un développement asymptotique de x_n sur l'échelle des puissances de $\frac{1}{n}$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

□ **Exercice 77** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; pour x strictement positif, on note $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k$.

- 1) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n > 0$ et que $0 < x_n \leq 1$.
- 2) Montrer, en considérant $P_{n+1}(x_n)$ que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.
- 3) a) Prouver que : $\forall n \geq 2, 0 < x_n \leq x_2 < 1$.
b) Déterminer la valeur de ℓ .
- 4) a) En posant $x_n = \frac{1}{2} + \varepsilon_n$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)\varepsilon_n = 0$.
b) En déduire un équivalent simple de $x_n - \frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

A Séries à termes positifs, comparaisons du terme général, équivalents

□ **Exercice 78** Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^4)^n} dt$.

B Comparaison à une intégrale

□ **Exercice 79** Déterminer un équivalent à l'infini de $u_n = \left(\prod_{k=n}^{2n} k \right)^{\frac{1}{n}}$.

□ **Exercice 80** Montrer que la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ converge. En déduire la somme de la série de terme général : $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

□ **Exercice 81** On pose pour tout entiers naturels p et n non nuls : $u_{n,p} = \frac{n^{np}}{(np)!}$.

- 1) Etudier à p fixé la convergence de la série de terme général $(u_{n,p})_n$. On note s_p sa somme.
- 2) Démontrer que : $ps_{p+1} < s_p$ et étudier la convergence de la suite s_p .

C Sommation des relations de comparaison

□ **Exercice 82** Soit $g = \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$, croissante, telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{g(x)} = +\infty$.

- 1) Donner un exemple d'une telle fonction.
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$.
- 3) Etablir l'équivalence : $g(1) + g(2) + \dots + g(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} g(n)$.

□ **Exercice 83** Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs, strictement croissante. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Montrer que : $\sum_{k=1}^n \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(u_n)$.

□ **Exercice 84** Soit α un réel strictement positif; on définit la suite (u_n) par $u_1 > 0$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

- 1) Etudier la convergence de la suite (u_n) .
- 2) On suppose $\alpha > 1$, et on pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Déterminer un équivalent simple de $u_n - \ell$.
- 3) On suppose $\alpha \in]0, 1]$. Déterminer un équivalent simple de u_n .

D Divers

□ **Exercice 85**

- 1) Calculer $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1}$.

On pourra écrire $\frac{1}{4k+1}$ comme une intégrale.

- 2) Soit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4k+1}$. Déterminer un équivalent de $S_n - S$ quand n tend vers $+\infty$.

- 3) Quelle est la nature de la série de terme général $S_n - S$?

□ **Exercice 86** Calculer la somme de la série de terme général $u_n = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx) \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

□ **Exercice 87** Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes réels convergente, on note $S_n(u)$ ses sommes partielles. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k$ et on note $S_n(v)$ les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

- 1) Exprimer $S_n(v)$ à l'aide des sommes $S_k(u)$.
- 2) Montrer que la série $\sum v_n$ converge et calculer sa somme.

□ **Exercice 88** Soit (u_n) une suite réelle décroissante, de limite nulle. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $v_n = u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2}$, et on suppose que pour tout $n \geq 1$, $v_n \geq 0$.

Etablir que $\sum n v_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} n v_n = u_1$.

□ **Exercice 89** Soit $u_0 \geq 0$ donné; on définit la suite u_n par : $\forall n \geq 1, u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$.

□ **Exercice 90** Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbf{N} & u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n} \end{cases}$

- 1) Montrer que ces relations définissent bien une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et que $\forall n \geq 2 \quad u_n \geq n$
- 2) En déduire un équivalent de u_n et la nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$.

□ **Exercice 91** Pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = n! \prod_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.

Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

□ **Exercice 92** Soit z un complexe vérifiant $\operatorname{Re}(z) > 0$. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{z(z-1)\dots(z-n+1)}{n!}$.
Montrer que $\sum u_n$ est convergente.

□ **Exercice 93** Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

On pose $S_n(u) = \sum_{k=0}^n u_k$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n(u)}$.

1) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On pourra étudier la suite de terme général $\ln(S_n(u))$.

2) On suppose (u_n) est bornée et que la série $\sum u_n$ diverge. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=0}^n v_k$.

□ **Exercice 94** On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\dots+x^{n-1}} dx$.

1) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

2) Déterminer un équivalent du terme général u_n .

□ **Exercice 95** Étudier la nature de la série obtenue à partir de la série $\sum \frac{1}{n}$ en supprimant les termes pour lesquels le chiffre 7 figure dans le développement décimal de n

□ **Exercice 96** Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante à termes positifs. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente.

1) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0$.

2) Montrer que le résultat est inexact si (u_n) n'est pas une suite décroissante.

□ **Exercice 97**

1) Soient $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0, +\infty[^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Montrer que $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$.

2) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs tel que $\sum u_n$ converge. Montrer qu'il existe une suite

(a_n) de réels positifs telle que : $\prod_{i=1}^n u_i = \frac{1}{(n+1)^n} \prod_{i=1}^n u_i a_i$ On pose $v_n = \left(\prod_{i=1}^n u_i \right)^{\frac{1}{n}}$, montrer que $\sum v_n$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

□ **Exercice 98** Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi : x \mapsto \operatorname{sh}(x) - x$ et $\alpha \in]0, +\infty[$.

1) Montrer l'existence de $\psi = \varphi^{-1}$.

2) Déterminer la nature de la série $\sum \psi \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$.

□ **Exercice 99** Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \sum_{k=0}^n k^{\alpha n}$.

Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 100** Soit $\alpha > 1$. On pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(n\alpha)^k}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n\alpha)^k}{k!}$.

Déterminer des équivalents de u_n et v_n quand n tend vers $+\infty$.

Algèbre linéaire

1 Applications du cours

A Familles de vecteurs

□ **Exercice 1** Dans $E = \mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$, on considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vérifier que f_3 appartient au plan vectoriel engendré par f_1 et f_2 .

□ **Exercice 2** Déterminer les réels λ et μ pour que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$ soient linéairement dépendants et préciser alors la relation de dépendance : $a = (3, -2, -1, 3)$, $b = (1, 0, 2, 4)$ et $c = (1, -3, \lambda, \mu)$.

□ **Exercice 3** Dans $\mathbb{R}^5$, quel est le rang de la famille :

$$\begin{aligned} x_1 &= (5, -3, 2, 1, 10), & x_2 &= (-1, 8, 1, -4, 7), \\ x_3 &= (2, 1, 9, -3, 6), & x_4 &= (1, 3, -5, 9, 11) ? \end{aligned}$$

□ **Exercice 4** Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel k et tout réel $\alpha > 0$, on définit $f_k \in E$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = |x - k|^\alpha$

- 1) La famille $(f_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est-elle libre pour $\alpha = 2$?
- 2) Même question pour $\alpha = 1$.

□ **Exercice 5** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

□ **Exercice 6** Pour $\alpha \in]0, 1[$, on pose $f_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{1-\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in]0, 1[}$ est libre.

□ **Exercice 7** Étudier la liberté des familles suivantes :

- 1) $(f_{a_1}, f_{a_2}, f_{a_3})$ où a_1, a_2, a_3 sont dans $\mathbb{R}$ et $f_{a_i} : x \mapsto \sin(x + a_i)$
- 2) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $f_n : x \mapsto \cos^n(x)$
- 3) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $f_n : x \mapsto \cos(nx)$
- 4) $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ où $f_\alpha(x)$ vaut 1 si $x = \alpha$ et 0 sinon.

□ **Exercice 8** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On définit $E = \left\{ P = \sum_{k=0}^n a_k X \in \mathbb{R}_n[X] ; a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = 0 \right\}$.

- 1) Montrer que E est un espace vectoriel pour les lois usuelles de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Déterminer une base et la dimension de E .

□ **Exercice 9** Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $g_k : x \mapsto \sin(kx)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) La famille $\mathcal{F}_n = (f_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est-elle libre ?
- 2) La famille $\mathcal{G}_n = (g_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est-elle libre ?
- 3) La réunion des deux familles précédentes est-elle libre ?

B Sous-espaces vectoriels, sommes

□ **Exercice 10** Dans $\mathbb{R}^4$, soient $\vec{e}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 0, 1)$, $\vec{e}_4 = (1, 1, 1, 1)$. Soient $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $G = \text{Vect}(\vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

Donner des systèmes d'équations caractérisant F et G . Montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

□ **Exercice 11** Dans $\mathbb{K}^n$ on considère la partie $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n ; \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ et le vecteur $\vec{e} = (1, 1, \dots, 1)$.

- 1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. En donner une base.
- 2) Montrer que H et $\text{Vect}(\vec{e})$ sont supplémentaires.
- 3) Plus généralement, montrer que si $\vec{a}$ est un vecteur de $\mathbb{K}^n$ n'appartenant pas à H , alors H et $\text{Vect}(\vec{a})$ sont supplémentaires.

□ **Exercice 12** Soit E l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , et en déterminer deux supplémentaires dans E .

□ **Exercice 13** Soient E, F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, G et H deux sous-espaces vectoriels de E .

- 1) Montrer que : $f(G + H) = f(G) + f(H)$.
- 2) Dans le cas où G et H sont en somme directe, $f(G)$ et $f(H)$ sont-ils en somme directe ? Examiner le cas où f est supposée injective.
- 3) Mêmes questions avec des sommes de p sous-espaces vectoriels de E .

□ **Exercice 14** Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on considère $u_i \in \mathcal{L}(E_i)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ l'unique application linéaire associant à $x = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $x_i \in E_i$ l'élément $u(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i)$.

Montrer que :

$$\text{Ker}(u) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(u_i) \text{ et } \text{Im}(u) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(u_i)$$

□ **Exercice 15** Soit E un espace vectoriel, A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et F un sous-espace vectoriel de E .

Les sous-espaces vectoriels $A \cap F$ et $B \cap F$ sont-ils supplémentaires dans F ?

C Applications linéaires

□ **Exercice 16** Soit ϕ l'application de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ dans lui-même, qui à la fonction f associe la fonction

$$\phi(f) : x \mapsto \phi(f)(x) = f(x) + f(-x)$$

- 1) L'application ϕ est-elle linéaire ?
- 2) Déterminer son noyau et son image.
- 3) Trouver l'ensemble des fonctions g de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ dont l'image par ϕ est la fonction cosinus.

□ **Exercice 17** Soit n un entier naturel non nul. On considère l'application $\varphi : \mathbf{C}[X] \rightarrow \mathbf{C}[X]$ définie par $\varphi : P \mapsto (1 + X)P' - nP$.

Vérifier que φ est linéaire, et étudier l'injectivité et la surjectivité de φ .

□ **Exercice 18** Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer que :
 - $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$
 - $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$
 - $f \circ g = 0 \iff \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$
- 2) Comparer $\text{rg}(g \circ f)$ avec $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$.

□ **Exercice 19** Soit $E = \mathbf{R}[X]$, f, g les applications linéaires de E dans E définies par $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto XP$.

- 1) Montrer que f est surjective et non injective.
- 2) Montrer que g est injective et non surjective.

□ **Exercice 20** Soit a un réel donné. Déterminer le noyau et le rang de l'endomorphisme f_λ de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad f_\lambda(P) = \lambda(P - P(a)) - (X - a)(P' - P'(a))$$

□ **Exercice 21** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ défini par $f : M \mapsto AM$.

- 1) Déterminer $\text{Ker}(f)$.
- 2) L'endomorphisme f est-il surjectif ?
- 3) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

□ **Exercice 22** Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

- $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$
- $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$.

□ **Exercice 23** Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \exists p \in \mathbf{N}^*, \quad f^p(x) = 0$$

- 1) Montrer que f est nilpotent (c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$).
- 2) Trouver un contre-exemple dans le cas où E n'est plus de dimension finie.

□ **Exercice 24** Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, de base (e_1, e_2, e_3) . Soit P le plan d'équation $x + y - 2z = 0$ et D la droite d'équations $x = 2y = z$.

Donner la matrice de la projection sur P parallèlement à D .

□ **Exercice 25** Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, de base (e_1, e_2, e_3) . Soit P le plan d'équation $x + 3y - z = 0$ et D la droite engendrée par le vecteur $e_1 + 2e_2 - e_3$. Donner la matrice de la symétrie par rapport à D et parallèlement à P .

□ **Exercice 26** Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, de base (e_1, e_2, e_3) ; soient trois réels α, β, γ tels que : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Soit P le plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ et D la droite dirigée par $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

Donner la matrice (dans la base (e_1, e_2, e_3)) de la projection sur P parallèlement à D . et la matrice de la symétrie sur d'axe D parallèlement à P .

□ **Exercice 27** Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, p un projecteur de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$p \circ f = f \circ p \iff \text{Ker}(p) \text{ et } \text{Im}(p) \text{ sont stables par } f$$

□ **Exercice 28** Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

1) Soient p, q deux projecteurs de E tels que $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(q)$

Montre que : $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

2) Soient p et q deux endomorphismes de E tels que : $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Montrer que p et q sont des projecteurs et que : $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(q)$.

3) Soient p, q deux projecteurs de E . Montrer que :

$$\text{Im}(p) = \text{Im}(q) \iff \begin{cases} q \circ p = p \\ p \circ q = q \end{cases}$$

□ **Exercice 29** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et p un projecteur. Montrer que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

□ **Exercice 30** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient p et q deux projecteurs de E . On note A et B leurs matrices respectives dans une base quelconque. Montrer que A est semblable à B si et seulement si $\text{rg}(p) = \text{rg}(q)$.

□ **Exercice 31** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f^2 - 4f + \text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Démontrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1} .

□ **Exercice 32** Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$ et $M = AA^T$. Déterminer $\text{Ker}(M)$, $\text{Im}(M)$.

□ **Exercice 33** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. On note a est l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Déterminer $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de a est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 34**

1) Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme non nul de E tel que $u \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. Trouver la dimension de $F = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \mid AX + XA = 0\}$.

□ **Exercice 35** Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = -I_3$.

1) Soit M une telle matrice. On considère l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à M , c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est M .

Quelle relation vérifie u ?

Démontrer que, pour tout vecteur x non nul de $\mathbf{R}^3$, la famille $(x, u(x))$ est libre.

2) Donner la matrice de u dans une base adaptée de $\mathbf{R}^3$.

3) Conclure.

□ **Exercice 36** Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbf{R}^3$ tel que $u^3 = -u$.

1) Démontrer que $\mathbf{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

2) Démontrer que 0 est l'unique valeur propre réelle de u .

3) Démontrer que le rang de u est égal à 2.

(On pourra démontrer par l'absurde que u n'est pas de rang 1)

4) En déduire qu'il existe une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 37** Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

1) Déterminer le rang de M et la dimension de $\text{Ker}(M)$.

2) Déterminer une base de $\text{Im}(M)$ et une base de $\text{Ker}(M)$.

□ **Exercice 38** Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que si p est un projecteur de E , alors $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$.

2) Si $\text{rg}(f) = 1$, peut-on affirmer que f soit un projecteur ?

3) Montrer que si $\text{rg}(f) = 1$ et $\text{tr}(f) = 1$, alors f est un projecteur.

□ **Exercice 39** On considère $f : \mathbf{R}_n[X] \rightarrow \mathbf{R}_n[X]$ définie par $f : P \mapsto P - P'$.

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Exprimer f^{-1} , puis exprimer les matrices de f et f^{-1} dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

□ **Exercice 40** (Matrices de permutations)

Soit n un entier strictement positif et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

On note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (P_\sigma)[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère $f_\sigma : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé à P_σ . On notera $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

1) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer $f_\sigma(e_j)$.

2) En déduire que $\pi : \sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupe $\mathfrak{S}_n$ dans $\text{GL}_n(\mathbf{R})$.

3) Déterminer $\gamma \in S_n$ telle $P_\sigma^\top = P_\gamma$. Que dire de P_σ ?

D Changement de bases

□ **Exercice 41** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et B sont-elles semblables ?

□ **Exercice 42** Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$. Montrer que n est pair et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

E Formes linéaires et hyperplans

□ **Exercice 43** Dans $\mathbf{R}^3$, de base canonique (e_1, e_2, e_3) , on considère

$$\begin{cases} y_1 = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ y_2 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ y_3 = e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

Montrer que (y_1, y_2, y_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer sa base duale.

□ **Exercice 44** Déterminer le rang de chacune des familles de formes linéaires suivantes :

1) Sur $\mathbf{R}^4$

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ f_2(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 \\ f_3(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 \end{cases}$$

2) Sur $\mathbf{R}^3$

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1 + x_2 - x_3 \\ f_2(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ f_3(x) = 5x_1 - 2x_2 + x_3 \\ f_4(x) = 11x_1 - 14x_3 \end{cases}$$

□ **Exercice 45** On se donne sur $\mathbf{C}^3$ les formes linéaires φ_1, φ_2 et φ_3 définies par :

$$\varphi_1 : (x, y, z) \mapsto x + 2y - 3z, \quad \varphi_2 : (x, y, z) \mapsto 5x - 3y \quad \text{et} \quad \varphi_3 : (x, y, z) \mapsto 2x - y - z$$

Vérifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbf{C}^3)^*$ et déterminer la base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{C}^3$ dont elle est la base duale.

□ **Exercice 46** Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ et φ_1, φ_2 et φ_3 les formes linéaires définies sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P'(1), \quad \varphi_3(P) = P''(-1)$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* et déterminer la base $\mathcal{B}$ de E dont elle est la base duale.

□ **Exercice 47** Soit $E = \mathbf{K}_{n-1}[X]$, soient $a_1, \dots, a_n$ n éléments distincts de $\mathbf{K}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

Soient φ_i les formes linéaires définies sur E par : $\varphi_i : P \mapsto P(a_i)$.

1) Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .

2) Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$ unique tel que :

$$\forall P \in E, \quad \int_0^1 P(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i)$$

□ **Exercice 48** Soient E un K e.v. de dimension finie et $n = \dim(E)$.
Démontrer que pour toute famille $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ de n éléments de E^* ,

$$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \text{ est liée} \iff \exists x \in E \setminus \{0\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \varphi_i(x) = 0$$

F Éléments propres

□ **Exercice 49** Rechercher les valeurs propres (réelles, puis complexes) et les sous-espaces propres associés des matrices suivantes ; sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 8 & -1 & 12 \\ 4 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ -5 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 50** Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles. Soit $\varphi : E \rightarrow E$ qui associe à une fonction f la fonction g définie par $g : x \mapsto xf'(x)$.

- 1) Déterminer les éléments propres de φ .
- 2) Reprendre l'exercice en remplaçant $]0, +\infty[$ par $[0, +\infty[$.

□ **Exercice 51** On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, +\infty[$. Soit u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $u(f)$ définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u(f) : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

- 1) Démontrer que pour tout f de E , $u(f)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- 2) Montrer que pour toute fonction f de E , $u(f)$ est prolongeable par continuité en 0 (on notera encore $u(f)$ le prolongement) ; en déduire que u est un endomorphisme de E .
- 3) On cherche ici les valeurs propres et les vecteurs propres de u .
 - a) Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de u .
 - b) Soit α un réel différent de 0 et f un élément de E non nul, tels que $u(f) = \alpha f$. Montrer que f est nécessairement dérivable sur $]0, +\infty[$, et trouver une équation différentielle vérifiée par h , restriction de f à $]0, +\infty[$.
Résoudre cette équation différentielle, et déterminer une condition nécessaire sur α pour que les fonctions h trouvées soient effectivement la restriction d'une fonction f continue sur $[0, +\infty[$.
 - c) Conclure en donnant les valeurs propres de u et les vecteurs propres associés.

G Calcul matriciel

□ **Exercice 52** Calculer M^k ($k \in \mathbf{N}$), avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 53** Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Prouver que :

$$(TT^\top = T^\top T) \iff T \text{ est diagonale}$$

□ **Exercice 54** (Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $I = \begin{bmatrix} 1 & n \end{bmatrix}$.
 Pour tout couple $(i, j) \in I^2$, on considère la matrice élémentaire $E_{ij} = (e_{kl})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définie par :

$$\forall (k, l) \in I^2, e_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

- 1) Soit $(i, j) \in I^2$ et $(k, l) \in I^2$. Déterminer le produit matriciel $E_{ij}E_{kl}$.
- 2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Préciser la matrice AE_{ij} .
- 3) Préciser la matrice $E_{ij}A$.
- 4) En utilisant un produit matriciel, échanger deux colonnes, puis deux lignes de la matrice A .
- 5) En utilisant un produit matriciel, ajouter à la $j^{\text{ième}}$ colonne λ fois la $i^{\text{ième}}$ colonne ; idem pour les lignes.
- 6) Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, c'est à dire :

$$\left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) ; \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), AM = MA \right\}$$

□ **Exercice 55** (Matrices circulantes - I) Soit $E = \{C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) ; (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^n\}$ où

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

On note $J = C(0, 1, 0, \dots, 0)$. Calculer J^k pour $k \in \mathbf{N}$. En déduire que E est une algèbre dont on donnera la dimension.

□ **Exercice 56** Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & 9 & 15 \\ -5 & 11 & 14 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 57** (Matrices de rang 1)

- 1) Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Démontrer que la matrice M est de rang 1 si et seulement si il existe

$$\text{deux matrices colonnes non nulles } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \text{ et } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

telles que : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} = b_i c_j$. Vérifier alors que $M = BC^T$.

- 2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de rang 1.
Démontrer qu'il existe $k \in K$ tel que $M^2 = kM$. Étudier la réciproque.
- 3) Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On considère le vecteur v de coordonnées $(b_1, \dots, b_n)$ et l'hyperplan H d'équation $\sum_{j=1}^n c_j x_j = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

On suppose que $v \notin H$. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection sur la droite vectorielle de base (v) , parallèlement à H .

On pourra déterminer analytiquement cette projection ou utiliser une écriture matricielle

- 4) Soit M une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$.
Démontrer que : $M^2 = 0 \iff \text{rg}(M) = 1$ et $\text{tr}(M) = 0$.

□ **Exercice 58** Soient $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$, $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
 Pour $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$, on note $A_{ij} = X_i X_j^T$. Etablir que $(A_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2}$ est libre.

□ **Exercice 59**

- 1) Peut-on avoir $I_n = AB - BA$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?
- 2) Montrer que $(\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)) \Rightarrow A = B$.

□ **Exercice 60** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

□ **Exercice 61** (Matrice de diagonale strictement dominante) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $n \geq 2$, telle que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$.
Montrer que A est inversible.

□ **Exercice 62** Soient $n, p \in \mathbf{N}^*$, $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $C \in \operatorname{GL}_p(\mathbf{K})$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
Démontrer que $M \in \operatorname{GL}_{n+p}(\mathbf{K})$ et calculer M^{-1} sous forme de matrice par blocs.

□ **Exercice 63** Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

- 1) Soit $E = \{aI + bJ, (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$. Démontrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, de base (I, J) .
- 2) Déterminer les éléments de E admettant un inverse dans E , dont on précisera les coordonnées dans la base (I, J) .
- 3) Résoudre dans E les équations d'inconnue $X : X^2 = I$ puis $X^2 = X$.
- 4) Soit p l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Vérifier que p est un projecteur et déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est $J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 64** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n

□ **Exercice 65** Calculer J^n pour $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & . & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$,

puis pour $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

□ **Exercice 66** Soit E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ($n \geq 2$) constitué des matrices $A(\alpha, \beta)$ telles que :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R} \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket & a_{ii} = \alpha + \beta \\ \forall i \neq j & a_{ij} = \beta \end{cases}$$

On pose J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- 1) Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, dont (I_n, J) est une base.
- 2) Quelles sont les matrices A inversibles dans E ?

3) Justifier que : $\forall A \in E, \forall p \in \mathbb{N}, \exists (a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^p = a_p I_n + b_p A$.

4) On propose deux méthodes pour déterminer les coefficients a_p et b_p :

- Déterminer un polynôme P de degré 2 annulant A , calculer le reste $b_p X + a_p$ de la division euclidienne de X^p par P , et en déduire le résultat.
- Procéder par récurrence sur p et calculer a_p et b_p .

H Déterminant

□ **Exercice 67** Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

□ **Exercice 68** On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $\varepsilon_1 = (2, -1, 3)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 2)$ et $\varepsilon_3 = (4, -1, 5)$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

□ **Exercice 69** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$.

1) Démontrer que : $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$.

2) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

3) Démontrer que : $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

□ **Exercice 70** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $a + b + c = 2p$. Démontrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 4 \sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)$$

□ **Exercice 71** Dans le développement du déterminant d'une matrice $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_6(\mathbb{K})$, quel est le signe de chacun des produits suivants : $a_{61}a_{23}a_{45}a_{32}a_{56}a_{14}$, $a_{21}a_{62}a_{34}a_{56}a_{15}a_{43}$ et $a_{23}a_{41}a_{65}a_{12}a_{56}a_{34}$?

□ **Exercice 72** Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

□ **Exercice 73** Soit n un entier naturel non nul. On considère le déterminant d'ordre n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 6 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

- Exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} et Δ_{n-2} ($n \geq 3$).
- En déduire Δ_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

□ **Exercice 74** Calculer le déterminant de la matrice $A = (|i-j|) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

□ **Exercice 75** (Déterminant de Vandermonde)

Soit $a_1, \dots, a_n$ des complexes, on pose

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Calculer $V(a_1, \dots, a_n)$.

On pourra remplacer la dernière colonne par $\begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$ où $P = \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$ et montrer que cela ne change pas la valeur du déterminant.

□ **Exercice 76** (Déterminant de Cauchy)

Calculer le déterminant de la matrice $A = \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des complexes tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout (i, j) .

On pourra remplacer la dernière colonne par $\begin{pmatrix} R(a_1) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}$ où $R = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)}{\prod_{i=1}^n (X + b_i)}$.

□ **Exercice 77** (Matrices circulantes)

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme

$$\Gamma(a_0, a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que E est une sous-algèbre de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on en donnera une base.
- 2) Soit la matrice de Vandermonde : $\mathcal{V}(1, j, j^2) = \left(j^{(i-1)(k-1)} \right)_{(i,k) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2}$. Calculer $\Gamma(a_0, a_1, a_2) \mathcal{V}(1, j, j^2)$, et en déduire le déterminant de $\Gamma(a_0, a_1, a_2)$.
- 3) En utilisant la méthode décrite ci-dessus, calculer le déterminant

$$\Gamma(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & a_{n-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 78** Soit $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $\text{rg}(M) = 1$. Montrer que $\det((A + M)(A - M)) \leq \det(A^2)$.

□ **Exercice 79** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A + X) = \det(B + X)$. Montrer que $A = B$.

□ **Exercice 80** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\deg(P) = n$.

- 1) Soit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que $\left(P(X + a_i) \right)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
- 2) En déduire la valeur, pour $x \in \mathbb{C}$, de $\det \left(\left(P(x + i + j) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2} \right)$.

□ **Exercice 81** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(C)$ où $C \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K})$ est définie par blocs par $C = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 82** Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $CD^\top + DC^\top = 0$.

Montrer que : $\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right|^2 = (\det(AD^\top + BC^\top))^2$.

□ **Exercice 83** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Montrer que : $\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \geq 0$.

On pourra utiliser des nombres complexes.

□ **Exercice 84** Soient $p, q \in \mathbf{N}^*$, $A \in \text{GL}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbf{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbf{K})$.

Montrer que : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$.

□ **Exercice 85** Soit $n \geq 2$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on définit $L_A : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par $L_A : M \mapsto AM$.

Calculer $\det(L_A)$.

□ **Exercice 86** Soit $D_n(\alpha) = \begin{vmatrix} 1^\alpha & 2^\alpha & \dots & n^\alpha \\ 2^\alpha & 3^\alpha & & (n+1)^\alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^\alpha & (n+1)^\alpha & \dots & (2n-1)^\alpha \end{vmatrix}$.

1) Calculer $D_n(1)$.

2) Calculer $D_n(2)$.

3) Calculer $D_n(3)$.

4) Expliquer pourquoi $D_n(\alpha)$ est nul pour n suffisamment grand (et α entier naturel).

□ **Exercice 87** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{ij} \in \{-1, 1\}$. Montrer que son déterminant est un multiple de 2^{n-1} .

□ **Exercice 88** Calculer le déterminant suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

□ **Exercice 89**

1) Soit $n \geq 2$; soit, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $A = (a_{lj})$ avec $a_{lj} = e^{\frac{2i\pi}{n}(l-1)(j-1)}$. Calculer A^2 .

2) Soit $D_n = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$. Calculer D_n .

3) Calculer $\det(A^2)$; que peut on dire de $\det(A)$?

I Espaces de matrices et d'endomorphismes

□ **Exercice 90** Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et $E = \{aI_2 + bS; (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$

1) Montrer que E est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2) Déterminer les éléments inversibles de E .

□ **Exercice 91** Déterminer la dimension du commutant d'un projecteur de rang r d'un espace de dimension n .

□ **Exercice 92** Soit E l'espace des matrices symétriques d'ordre n à coefficients complexes et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice fixée. On pose $\varphi : E \rightarrow E$ définie par $\varphi : M \mapsto A^\top M + MA$. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et calculer $\text{tr}(\varphi)$.

□ **Exercice 93** Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à éléments diagonaux deux à deux distincts.

- 1) Quelle est la dimension de l'image de l'application $M \mapsto DM - MD$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même ?
- 2) Montrer que cette image est contenue dans l'ensemble des matrices à diagonale nulle.
- 3) En déduire qu'elle est égale à cet ensemble.

□ **Exercice 94** Soit $n \geq 2$. On considère $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi : M \mapsto M + \text{tr}(M)I_n$.

- 1) Vérifier que φ est linéaire et déterminer $\text{tr}(\varphi)$.
- 2) Déterminer $\text{rg}(\varphi)$.

□ **Exercice 95** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$). On considère $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi : M \mapsto AMB$.

- 1) Vérifier que φ est linéaire et déterminer $\text{tr}(\varphi)$.
- 2) Déterminer $\text{rg}(\varphi)$.

2 Exercices plus élaborés

A Familles de vecteurs

□ **Exercice 96** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $P_r(X) = (X - 1)^r (X + 1)^{n-r}$. Démontrer que $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont linéairement indépendants.

□ **Exercice 97** Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on pose $f_{\alpha, \beta} :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_{\alpha, \beta} : x \mapsto x^\alpha (\ln x)^\beta$. Étudier la liberté de $(f_{(\alpha, \beta)})_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$.

B Sous-espaces vectoriels, sommes

□ **Exercice 98** Soit E un espace vectoriel, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$$

- 1) Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, soit F_i un sous-espace vectoriel de E_i . Montrer que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe.
- 2) Dans cette question $p = 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Donner un exemple où $F = (F \cap E_1) \oplus (F \cap E_2)$ puis un exemple où $F \neq (F \cap E_1) \oplus (F \cap E_2)$. On pourra faire des dessin en dimension 2.
- 3) Montrer $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ si et seulement s'il existe $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de

$$E_1, \dots, E_p \text{ respectivement tels que } F = \bigoplus_{i=1}^p F_i.$$

□ **Exercice 99** Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n , H_1 et H_2 deux hyperplans de E distincts. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

C Applications linéaires

□ **Exercice 100** Soit E le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et 2π -périodiques : Soit l'application $T : E \rightarrow E$ définie par $T : f \mapsto f'$.

- 1) Montrer que T est linéaire et déterminer $\text{Ker}(T)$ et $\text{Im}(T)$.
- 2) À-t-on $\text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T) = E$?

□ **Exercice 101** Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel quelconque, u, v deux endomorphismes de E ; montrer l'équivalence :

$$u \circ v \in \text{GL}(E) \iff \begin{cases} u \text{ surjectif, } v \text{ injectif,} \\ \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(v) = E \end{cases}$$

□ **Exercice 102** Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbf{R}^3$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ et $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^3, \quad f(x) = \varphi(x) a$$

□ **Exercice 103** Soient E, F des $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

- 1) Montrer que : $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
- 2) On suppose que $E = F$, que $u + v$ est un automorphisme de E et que $u \circ v = 0$. Montrer que : $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = n$ où $\dim(E) = n$.

□ **Exercice 104** Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$, vérifiant : $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$. Montrer que : $E = \text{Im}(v) \oplus \text{Ker}(u)$.

□ **Exercice 105** Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $E_n = C_n[X]$, soit f l'application linéaire définie sur $C[X]$ par :

$$f : P \mapsto P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$$

Montrer que f induit un isomorphisme de E'_n sur E_{n-2} où $E'_n = \{P \in E_n / P(0) = P'(0) = 0\}$.

□ **Exercice 106** (Lemme de factorisation)

- 1) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que : f est injective (resp. surjective) si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $g \circ f = \text{id}_E$ (resp. $f \circ g = \text{id}_F$).
- 2) Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ vérifiant $g = h \circ f$ si et seulement si $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

□ **Exercice 107** Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n supérieure ou égale à 2. Montrer que tout endomorphisme de E est somme de deux automorphismes de E .

On cherchera à construire deux bases de E adaptées à l'endomorphisme.

□ **Exercice 108** Soit f un endomorphisme de E , $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, tel que f^2 soit non nul et $f^3 = 0$.

- 1) Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $(e, f(e), f^2(e))$ soit une base de E .
- 2) Trouver les endomorphismes de E commutant avec f .

□ **Exercice 109** Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$, $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. On suppose que $M^3 = -M$ et $M \neq 0$.

- 1) Soit g l'endomorphisme de $\text{Im}(f)$ induit par f ; calculer g^2 . Que vaut $\text{rg}(f)$?

$$2) \text{ Montrer que } M \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□ **Exercice 110** Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\text{id}$; soit e_1 un vecteur non nul.

- 1) Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est libre.
- 2) Montrer que n est pair.
- 3) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 4) Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathbf{C} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & ax + bf(x) \end{cases} \text{ où } a = \text{Re}(\lambda), b = \text{Im}(\lambda)$$

confère à E une structure de $\mathbf{C}$ -espace vectoriel. Retrouver les résultats précédents à l'aide de cette constatation.

- 5) Réciproquement, montrer que si n est pair, il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{id}$.

□ **Exercice 111** Soit E un espace vectoriel de dimension $3n$, u un endomorphisme de E tel que $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2n$.

- 1) Montrer que $\text{rg}(u^2) = n$.
- 2) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : matrice définie par blocs :

$$\mathcal{M}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 112**

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbf{K}, f(x) = \lambda_x x$$

Montrer que f est une homothétie.

□ **Exercice 113** Soit E un espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ v = \text{id}$. Montrer que u est inversible.

□ **Exercice 114** Soit E un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E et $T : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ défini par $T : g \mapsto f \circ g - g \circ f$.

Montrer que si f est nilpotent, alors T l'est aussi.

□ **Exercice 115**

- 1) Montrer que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- 2) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^*$, l'équation $A + \alpha I_n = B^{-1}AB$ n'admet pas de solutions $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \text{GL}_n(\mathbf{R})$ ($n \neq 0$).
- 3) Soient u et v deux endomorphismes de E , $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, tels que $u = u \circ v - v \circ u$.
Montrer que u n'est pas bijectif.
- 4) Soit $E = \mathbf{R}^2$ et u un endomorphisme non nul de E tel que $u^2 = 0$.
Montrer que $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$ et $\text{tr}(u) = 0$.

□ **Exercice 116** Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, commutant entre elles. Montrer que : $A_1 A_2 \dots A_n = 0$

On pourra commencer par montrer que si $u \in \mathcal{L}(C^n)$ est nilpotente, et si F est un sous-espace vectoriel non nul stable par u , alors $\dim u(F) < \dim(F)$.

D Changement de bases

□ **Exercice 117** Soient E et F deux K espaces vectoriels de dimensions respectives p et n non nulles et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application de rang r . Démontrer que

$$G = \{g \in \mathcal{L}(F, E); f \circ g = 0_{\mathcal{L}(F)} \text{ et } g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$$

est un espace vectoriel de dimension $(p-r)(n-r)$.

□ **Exercice 118** Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E . On pose $A = \{f \in \mathcal{L}(E); f(F) \subset F\}$. Vérifier que A est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. En donner sa dimension.

E Formes linéaires et hyperplans

□ **Exercice 119** Soit E un K -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 et $u \in E \setminus \{0\}$ tel que $\text{Im}(f) = Ku$.

- 1) Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ unique tel que : $\forall x \in E, f(x) = \varphi(x)u$.
- 2) Montrer qu'il existe $\alpha \in K$ unique tel que $f^2 = \alpha f$ et que, si $\alpha \neq 1$, $f - \text{id}$ est inversible.

□ **Exercice 120** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \rightarrow & K \\ X & \rightarrow & \text{tr}(AX) \end{array}$$

est un élément de $(\mathcal{M}_n(K))^*$, puis que l'application $\theta : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow (\mathcal{M}_n(K))^*$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(K), \forall X \in \mathcal{M}_n(K), (\theta(A))(X) = \text{tr}(AX)$$

est un isomorphisme de K espace vectoriel.

- 2) Montrer qu'une forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(K)$ qui vérifie :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(K), \varphi(MN) = \varphi(NM)$$

est proportionnelle à la trace.

En déduire que le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(MN - NM / M, N \in \mathcal{M}_n(K))$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$.

□ **Exercice 121** Soit E un K -espace vectoriel et $\ell, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$ sont des formes linéaires sur E . Démontrer :

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\ell_i) \subset \text{Ker}(\ell) \iff \ell \in \text{Vect}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$$

□ **Exercice 122** Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et a et b deux réels donnés vérifiant $a < b$.

- 1) Soit $P_0 = (X-a)(X-b)(X - \frac{a+b}{2})$. Montrer que

$$\int_a^b P_0(x) dx = 0$$

- 2) Démontrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] \quad \int_a^b P(x) dx = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

On pourra utiliser l'exercice précédent.

- 3) Calculer α, β, γ .

□ **Exercice 123** Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E , $P = (p_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soient $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et $\mathcal{B}'^* = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ les bases duales de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$. Montrer que $Q = (P^\top)^{-1} = (P^{-1})^\top$.

Application : On pose $E = \mathbf{K}_{n-1}[X]$, $\mathcal{B} = (X^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$, $\mathcal{B}' = ((X-a)^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$, $\varphi_k : P \mapsto \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ et $\psi_k : P \mapsto \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$. Déterminer les matrices P et Q

□ **Exercice 124** Soient $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geq 2$ et a et b deux réels distincts. Montrer qu'il existe une forme linéaire et une seule φ sur $\mathbf{R}_n[X]$ telle que :

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(X) = 0, \quad \forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad (P(a) = P(b) = 0 \implies \varphi(P) = 0)$$

F Éléments propres

□ **Exercice 125** Soit S l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles définies à partir du rang 1. Soit $\varphi : S \rightarrow S$, avec, si $U = (u_n)$, $V = (v_n)$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

$$U \mapsto V$$

- 1) Montrer que φ est un automorphisme de E .
- 2) Déterminer les éléments propres de φ .

□ **Exercice 126** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbf{R})$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices $\left(\begin{array}{c|c|c} A & A & A \\ \hline A & A & A \\ \hline A & A & A \end{array} \right)$ et $\left(\begin{array}{c|c|c} A & A & A \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline A & A & A \end{array} \right)$

□ **Exercice 127** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ deux matrices diagonalisables. Montrer que la matrice C définie par blocs par $C = \left(\begin{array}{c|c} b_1 A & b_2 A \\ \hline b_3 A & b_4 A \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ est diagonalisable.

G Calcul matriciel

□ **Exercice 128** Soit $n \geq 2$; on pose $a = e^{\frac{i2\pi}{n}}$, $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $X = (x_{pq})$ avec $x_{pq} = a^{(p-1)(q-1)}$ et $Y = (y_{pq})$ avec $y_{pq} = a^{-(p-1)(q-1)}$. Calculer X^2 , Y^2 , XY , YX . X admet-elle un inverse ?

□ **Exercice 129** Soit u un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$u(I_n) = I_n \quad \text{et} \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad u(AB) = u(BA)$$

Montrer que u conserve la trace.

□ **Exercice 130** Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$, soit $C = AB^\top$ et $D = C - I_n$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que D soit inversible et calculer, dans ce cas, D^{-1} .

□ **Exercice 131** Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\text{rg}(B) = 1$. Montrer que : $A + B \in \text{GL}_n(\mathbf{K}) \iff \text{tr}(BA^{-1}) \neq -1$.

□ **Exercice 132** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et M la matrice définie par blocs :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right),$$

- 1) Calculer le rang de M en fonction de A et B .
- 2) Calculer M^{-1} quand elle existe.

□ **Exercice 133** Soient $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$.

Montrer que si $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K})$ est la matrice définie par blocs : $M = \left(\begin{array}{c|c} P & I_n \\ \hline O_{n,n} & Q \end{array} \right)$, alors M est inversible et déterminer son inverse.

H Espaces de matrices et d'endomorphismes

□ **Exercice 134** Soit E un espace vectoriel. On appelle le centre de $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble :

$$C(\mathcal{L}(E)) = \{f \in \mathcal{L}(E) / \forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}.$$

- 1) Déterminer $C(\mathcal{L}(E))$ si E est de dimension finie.
- 2) Même question si E n'est pas de dimension finie.

□ **Exercice 135** Soit f une application non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$, telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \quad f(AB) = f(A)f(B)$$

Montrer que $f(A) \neq 0 \iff A$ est inversible.

□ **Exercice 136** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang r fixé. On considère

$$F = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), ABA = 0\}.$$

- 1) Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

$$2) \text{ Déterminer } F \text{ si } A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}.$$

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 137** Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Soit u un endomorphisme u de E . pour tout entier naturel k , on pose $d_k = \dim(\text{Ker}(u^k))$, et $\delta_k = d_{k+1} - d_k$.

- 1) Montrer que la suite (d_k) est croissante.
- 2) Montrer que la suite (d_k) est strictement croissante jusqu'à un certain rang, puis qu'elle est stationnaire.
- 3) Montrer que la suite (δ_k) est décroissante.
- 4) Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que : $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$.

□ **Exercice 138** A et B étant données dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

- a) $X = \text{tr}(X)A + B$
- b) $X + X^T = \text{tr}(X)A$.

- **Exercice 139** Soient n et p deux entiers naturels non nuls ; soit $(A_k)_{k \in \{1, \dots, p\}}$ une famille d'éléments deux à deux distincts de $\text{GL}_n(\mathbf{R})$, telle que $\{A_1, \dots, A_p\}$ soit stable pour la multiplication. Montrer que $\text{tr} \left(\sum_{k=1}^p A_k \right)$ est un entier naturel multiple de p .
- **Exercice 140** Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$; déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $\text{Com}(X) = A$ où $\text{Com}(X)$ désigne la comatrice de X .

Intégrales sur un intervalle quelconque

A Intégrabilité

□ **Exercice 1** Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 a) \int_0^{+\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1})dx & b) \int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1})dx \\
 c) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^3+x+1}}dx & d) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx \\
 e) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}}dx & f) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}dx \\
 g) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx & h) \int_1^{+\infty} \frac{1}{(\operatorname{sh}(\sqrt{\ln x}))^2}dx
 \end{array}$$

□ **Exercice 2** Discuter l'existence selon $\alpha \in \mathbf{R}$ de $\int_0^{+\infty} (1 - \operatorname{th}^\alpha(x))dx$.

□ **Exercice 3** Soit α un réel. Étudier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \operatorname{th}(x)}{x^\alpha}dx$.

□ **Exercice 4** Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^b}dx$ existe.

□ **Exercice 5** Étudier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de $f : x \mapsto (x+1)^{\frac{1}{x+1}} - \frac{x+\ln(x)}{x}$.

□ **Exercice 6** Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f^2 et f'^2 sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$.

Montrer que $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ et en déduire que $\lim_{+\infty} f = 0$.

□ **Exercice 7** Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

- 1) À l'aide d'un exemple, montrer que f ne tend pas nécessairement vers 0 en $+\infty$.
- 2) Montrer que si on suppose que f est uniformément continue alors $\lim_{+\infty} f = 0$

B Calculs

□ **Exercice 8** Calculer les intégrales suivantes après avoir montré leur existence. On pourra réaliser le changement de variables précisé entre parenthèses.

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx & b) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} dx \quad \left(u = \sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}\right) \\ c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx & d) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx \quad (u = \sqrt{e^x+1}) \end{array}$$

□ **Exercice 9** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ est intégrable sur $]0, 1[$, puis calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$

□ **Exercice 10**

- 1) Étudier l'existence de l'intégrale $\int_{]0, +\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2 + a^2} dx$, pour $a \in \mathbb{R}_+$.
- 2) La calculer pour $a = 1$.
- 3) La calculer pour $a > 0$.

□ **Exercice 11** Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1+x)^2} dx$

On pourra utiliser l'exercice précédent.

□ **Exercice 12** Soit $n \in \mathbb{N}$. Existence et valeur de $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

□ **Exercice 13** Soit $n \in \mathbb{N}$. Existence et calcul de $I_n = \int_{[0, +\infty[} e^{-x} x^n \sin(x) dx$.

□ **Exercice 14** Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi \frac{1}{2 + \sin t + \cos t} dt$.

On pourra poser $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

□ **Exercice 15** Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}$.

- 1) Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- 2) Soit $I_n = \int_{[0, +\infty[} f_n(t) dt$. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} puis calculer I_n .

□ **Exercice 16** Soit $a \in]0, +\infty[$ et $k \in]1, +\infty[$. On considère $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\int_a^{+\infty} \frac{f(kx) - f(x)}{x} dx$ existe et la calculer.

□ **Exercice 17** Existence et calcul de $\int_{]0, 1[} \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

On pourra poser $u = \ln x$.

□ **Exercice 18** Soit $I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$.

- 1) Existence de I .
- 2) Calcul de I . On pourra poser $x = 1 + \cos \theta$ ou $u = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$.

□ **Exercice 19** Montrer que :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^3} dx$$

C Intégrabilité avec des séries

□ **Exercice 20** Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $x \mapsto f(x) = e^{-x^2|\sin x|}$.

On pose pour n entier naturel : $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx$.

- 1) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
- 2) La fonction f est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$?

□ **Exercice 21** Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x^2 \sin(x)}{1+x^3} dx$.

- 1) Déterminer la limite de (I_n) , un équivalent de (I_n) , un développement asymptotique à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ de I_n .
- 2) Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?

□ **Exercice 22** Étudier l'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2(x-\lfloor x \rfloor)}} dx$.

□ **Exercice 23** L'application $x \mapsto e^{-x|\sin(x)|}$ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$?

□ **Exercice 24** La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 \sin(x)}{1+x^3}$ est-elle intégrable sur $\mathbf{R}_+$?

□ **Exercice 25** Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$, décroissante, intégrable sur $]0, +\infty[$.

- 1) Montrer que la série de fonctions : $\sum_{k \geq 1} f(kt)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, on note g la fonction somme.
- 2) Comparer $\lim_{t \rightarrow 0^+} tg(t)$ et $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

D Intégrales semi-convergentes

□ **Exercice 26** On pose pour tout entier n non nul,

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx) \cotan(x) dx \text{ et } v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{x} dx$$

(avec $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$)

- 1) Montrer que les intégrales u_n et v_n existent.
- 2) Montrer que u_n ne dépend pas de n .
- 3) On considère sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction $h : x \mapsto \cotan(x) - \frac{1}{x}$
 - a) Montrer que h se prolonge par continuité en 0. On note encore h le prolongement.
 - b) Montrer que h est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
- 4) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(px) dx = 0$$

- 5) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

On n'oubliera pas de justifier la convergence.

□ Exercice 27

- 1) En minorant $f : x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x}$ sur des intervalles bien choisis, montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
- 2) Existence des intégrales : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$, $\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{3}} \sin x dx$.
- 3) Les fonctions intervenant ci-dessus sont-elles intégrables sur $[0, +\infty[$?
- 4) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ est définie pour tout $\alpha > 0$, alors que $g_\alpha : x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- 5) Étudier la nature des intégrales impropres $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x} dx$.

E Intégration des relations de comparaison

□ Exercice 28 Soit $f : x \mapsto \int_x^\infty e^{-t^2} dt$.

- 1) Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x > 0, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x} e^{-x^2}$
- 2) Montrer que $f(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2x} e^{-x^2}$.

□ Exercice 29 Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x^2} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{\sqrt{1+t^2} \ln(1+t^2)} dt$.

□ Exercice 30 Soient a, b dans $\mathbf{R}$ tels que $0 < a < b$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{1 - \cos(u)}{u^3} du$

□ Exercice 31 Soit $a > 0$.

1) Étudier l'existence de $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+a} dx$.

2) Déterminer un équivalent de $I(a)$ quand a tend vers 0^+ .

On pourra faire une intégration par parties ou un changement de variables.

□ Exercice 32

1) Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{[a, 3a]} \frac{\tan(x)}{x^2} dx$.

2) Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_{]0, a]} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

□ Exercice 33 Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi x) - \arctan(x)}{x} dx$.

□ Exercice 34 Soit $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$.

1) Déterminer une suite simple (v_n) telle que $u_n \sim v_n$.

2) Montrer que $(u_n - v_n)$ converge. On note α sa limite. On ne cherchera pas à la calculer.

3) Montrer que $u_n - v_n - \alpha$ est équivalent à $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2 \ln(k)}$.

4) Déterminer un équivalent de $u_n - v_n - \alpha$.

F Théorèmes de Lebesgue

□ Exercice 35 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^2 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx$.

□ **Exercice 36** Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ continue. On pose $u_n = \int_0^1 f(x^n) dx$.

Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

□ **Exercice 37** Soit $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$. Étudier la convergence et la limite de la suite (u_n) .

□ **Exercice 38** soit $I_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} dx$.

1) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \cos(\frac{\pi}{2}x) \leq \frac{\pi}{2}(1-x)$.

2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

□ **Exercice 39** Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $u_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x^n} dx$.

1) Justifier l'existence de la suite (u_n) puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2) Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 40**

1) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

□ **Exercice 41**

Soit la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n & \text{si } x \in [-\sqrt{2n}, \sqrt{2n}] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{R} \setminus [-\sqrt{2n}, \sqrt{2n}] \end{cases}$$

Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbf{R}$, et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx$.

On rappelle l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ vaut $\sqrt{\pi}$.

□ **Exercice 42** Soit $f_n(x) = \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$.

1) Étudier l'intégrabilité de f_n sur $]0, +\infty[$.

2) Existence et valeur de la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

3) En déduire un équivalent de $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

□ **Exercice 43** Soit $n > 2$ et $f_n : [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f_n : x \mapsto \frac{x}{(1+x)^n}$.

1) Montrer que f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.

3) Montrer que la série de terme général $u_n = \int_1^{+\infty} f_n(x) dx$ converge et calculer sa somme.

□ **Exercice 44** Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx}$ avec x réel.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Calculer $f(x)$.

3) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\int_{]0, +\infty[} f(x) dx$.

□ **Exercice 45**

1) Justifier que $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$ existe et la calculer.

2) En écrivant $\frac{1}{\operatorname{ch} t}$ sous la forme d'une série, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

□ **Exercice 46** Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(= \frac{\pi^2}{6} \right)$$

□ **Exercice 47** Démontrer l'égalité suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

□ **Exercice 48** Montrer que : $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

□ **Exercice 49** Soit $u_n = \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx$.

1) Déterminer $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2) Déterminer un équivalent simple de $u_n - \ell$.

On pourra utiliser une intégration par partie.

3) Montrer que : $u_n = \ell + \frac{a}{n} + \frac{J}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où J est une intégrale qu'on explicitera.

4) Montrer que $J = \frac{\pi^2}{12}$, en commençant par montrer que J est la somme d'une série.

□ **Exercice 50** Soit $f : x \mapsto \int_{[0, +\infty[} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt$.

1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.

□ **Exercice 51** Soit $f : x \mapsto \int_{[1, +\infty[} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$.

Déterminer le domaine de définition de f et donner un équivalent simple de f au voisinage de 0 et de $+\infty$.

□ **Exercice 52** Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} dt$.

1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) Déterminer sa limite en 0^+ puis un équivalent simple en 0^+ .

On pourra utiliser que $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

G Divers

□ **Exercice 53** Étudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\int_{[0, +\infty[} e^{\sin(x)} dx$

b) $\int_{]0, 1]} \frac{1}{\arccos(1-x)} dx$

c) $\int_{[1, +\infty[} \ln\left(\frac{x+1}{x} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 1}\right) dx$

d) $\int_{[1, +\infty[} e^{-x \sin(x)} dx$

□ **Exercice 54** Soit $a, b \in \mathbf{R}$. Étudier, en fonction des paramètres, l'existence des intégrales suivantes :

$$a) \int_{]0,1[} \frac{1}{\sqrt{x^a - x^2}} dx \quad b) \int_{]0,+\infty[} \frac{x^a}{1+x^b} dx \quad c) \int_{]0,+\infty[} x^a e^{-x} dx$$

□ **Exercice 55** Soit $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$. Existence et calcul de $F_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + a^2)^n} dt$.

□ **Exercice 56** Déterminer tout les polynômes de $\mathbf{R}_4[X]$ tels que $\sqrt{P(x)} - (x^2 - x + 1)$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 57** Étudier l'existence de $I(r, s) = \int_{]0,1[} x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx$ où $(r, s) \in \mathbf{R}^2$. Calculer $I(r, s)$ pour $s \in \mathbf{N}^*$.

□ **Exercice 58** Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_{]0,1[} \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2} dx \text{ où } a \in \mathbf{R} \quad b) \int_{]0,+\infty[} \frac{\ln(x)}{(x+a)^2} dx \text{ où } a > 0$$

$$c) \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2} dx \quad d) \int_{]2,+\infty[} \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)} dx$$

□ **Exercice 59** Montrer l'existence de l'intégrale suivante et établir le résultat fourni :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)} dx = \frac{\pi}{1+|y|} \quad (y \in \mathbf{R})$$

□ **Exercice 60** Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{n^3 x^3 + n + 2} dx$. Déterminer la nature de la série de terme général I_n .

□ **Exercice 61**

Soit $a > 0$ et $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^3 + a^2} dx$

Étudier la limite de $I(a)$ et déterminer un équivalent simple de $I(a)$ quand $a \rightarrow \infty$. Mêmes questions quand $a \rightarrow 0^+$.

□ **Exercice 62** Soit $f \in \mathcal{C}([1, +\infty[, \mathbf{R}_+)$. On suppose qu'il existe deux réels a et b positifs tels que :

pour tout x de $[1, +\infty[: f(x) \leq a \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt + b$.

Montrer que f est bornée sur $[1, +\infty[$.

□ **Exercice 63** Montrer que $x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\int_{]0,+\infty[} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$.

□ **Exercice 64** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \geq 0, f'(x) \geq \alpha$. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x^2}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

□ **Exercice 65**

1) Soit $f :]0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$, continue, décroissante et intégrable sur $]0, 1]$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_{]0,1[} f(x) dx.$$

2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \right)^{\frac{1}{n^2}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}$.

□ **Exercice 66** Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = p > 0$$

Déterminer la nature de $\int_{[0, +\infty[} f(x) dx$, et donner un équivalent de $\int_n^{n+1} f(x) dx$ en fonction de p et de $f(n)$.

□ **Exercice 67** Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs strictement positives.

On suppose que f n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}$. Pour tout a dans $\mathbf{R}$, on définit l'application F_a de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par : $F_a(x) = \int_{a-x}^{a+x} f(t) dt$.

- 1) Montrer que F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, calculer sa dérivée. Montrer que F_a est impaire, et dresser son tableau de variation en précisant ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
- 2) Montrer que pour tout a dans $\mathbf{R}$, il existe un unique $x_a \in \mathbf{R}$ tel que $F_a(x_a) = 1$. On pose, dans la suite, $g(a) = x_a$.
- 3) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell > 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2\ell}$.

□ **Exercice 68** (Inégalité de Wirtinger) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbf{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $I = \int_0^1 f(t) f'(t) \frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} dt$ existe, et montrer que :

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt$$

On pourra étudier $\int_0^1 \left(f'(t) + a \frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} f(t) \right)^2 dt$, où a est un réel bien choisi.

□ **Exercice 69** Soit la fonction : $f : x \longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- 1) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- 2) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
- 3) Effectuer deux intégrations par parties pour obtenir deux expressions différentes de $f(x)$.
- 4) Déterminer un équivalent de f en 0 , puis un développement asymptotique à deux termes de f en 0 .
- 5) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$, puis un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$ en utilisant l'autre expression.
- 6) Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
- 7) Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.
- 8) Calculer : $\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt dx$.

On pourra procéder à une intégration par parties.

□ **Exercice 70** Étudier l'existence et déterminer la valeur de : $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) dx$.

□ **Exercice 71** Soit (a_n) une suite de réels tels que : $\forall \theta \in \mathbf{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sin(n\theta) = 0$.

Montrer que la suite (a_n) converge vers 0.

On pourra raisonner par l'absurde.

□ **Exercice 72** Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1 - \sqrt[n]{x})^n dx$.

□ **Exercice 73** Soit $f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

□ **Exercice 74** Soit $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Existence de I_n ?

2) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$.

□ **Exercice 75** Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.

□ **Exercice 76** Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} e^{-n \sin(\frac{x}{n})} dx$.

□ **Exercice 77** (Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss)

1) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta) d\theta$, pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\theta) d\theta$.

b) Sans calculer I_n , montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

c) Montrer que $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, et strictement positive.

d) Calculer I_n (former une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}), donner plusieurs écritures de I_n .

e) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, et en déduire la limite de la suite $(\frac{I_{n+1}}{I_n})$.

f) Montrer que la suite $(nI_n I_{n-1})_{n \geq 1}$ est constante, donner la valeur de cette constante.

g) Déduire des deux questions précédentes que : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2) Calculer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$.

En utilisant les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$ calculer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

□ **Exercice 78**

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.

2) Déterminer la limite en $+\infty$ de $u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

□ **Exercice 79** Existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{\sqrt{t}} dt$. Exprimer I à l'aide de la somme d'une série.

□ **Exercice 80** Montrer que pour $x \in]-1, 1[$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

□ **Exercice 81** Soit $I(\alpha) = \int_0^1 \ln(t) \ln(1-t^\alpha) dt$, où $\alpha > 0$.

1) Etudier l'existence de $I(\alpha)$; écrire $I(\alpha)$ comme somme d'une série.

2) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$.

3) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha)$, et un équivalent de $I(\alpha)$ en $+\infty$.

□ **Exercice 82** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, on pose $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\operatorname{ch}(t) - 1} dt$

1) Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$ l'intégrale $I(\alpha)$ existe-t-elle ?

2) En écrivant $\frac{t^\alpha}{\operatorname{ch}(t)-1}$ sous forme d'une série en e^{-t} , exprimer $I(\alpha)$ en fonction de $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ et $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

□ **Exercice 83** Démontrer la relation

$$\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

□ **Exercice 84** Existence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(t)e^{-2t}}{t} dt$.

□ **Exercice 85** Soit la suite u_n définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 2\sqrt{u_n}\sqrt{1+u_n}$.

1) Montrer que : $\int_{u_n}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx = 2 \int_{u_{n+1}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$

2) En déduire un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 86** Soit $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + 1} dx$.

1) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

2) Montrer que $1 - v_n = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-2}}{x^n + 1} dx$.

3) Montrer que : $v_n = 1 + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

□ **Exercice 87** Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $f(0) = 1$, et $\forall x \in]0, 1], |f(x)| < 1$.

On suppose aussi que f est dérivable à droite en 0, et que $f'_d(0) = -k$, avec $k > 0$.

Déterminer un équivalent de $u_n = n \int_0^1 f(x)^n dx$ quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 88** Soit la fonction f continue et intégrable sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, t \mapsto f(t)e^{-nt}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

2) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt} dt = 0$.

3) Soit $\eta > 0$. Montrer que la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $n \int_\eta^{+\infty} f(t)e^{-nt} dt$ est nulle.

4) Montrer que la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $n \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt} dt$ vaut $f(0)$.

□ **Exercice 89** Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+|x-n|}$.

1) Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbf{R}$.

2) Montrer que f_n est de carré intégrable sur $\mathbf{R}$ et calculer $\int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|^2 dx$.

3) Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ de carré intégrable sur $\mathbf{R}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x)g(x) dx = 0$

□ **Exercice 90** Soit $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow]0, +\infty[$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que : $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x}$, où $\alpha > 0$.

1) Soit $m > 0$; déterminer la limite quand t tend vers $+\infty$ de $\frac{f(mt)}{f(t)}$.

2) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} e^{-tn} f(n)$ converge pour tout $t > 0$.

3) Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-tn} f(n)$.

4) Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-tn} f(n) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx$.

5) Montrer que : $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$ où $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} t^\alpha e^{-t} dt$.

□ **Exercice 91** En utilisant une comparaison à une série, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^3 \sin^2 x} \text{ diverge, alors que } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x} \text{ converge.}$$

□ **Exercice 92** Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2} dt$.

1) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2) Déterminer un équivalent simple de u_n .

□ **Exercice 93** Soit $f : [0, 1] \Rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, et $\forall x \in]0, 1[, f(x) > 0$. on suppose que $\left| \frac{f''}{f} \right|$ est intégrable sur $]0, 1[$. Soit $M = \sup_{[0,1]} f$. Soient $a, b \in]0, 1[$ tels que $a < b$.

1) Montrer que $\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \frac{1}{M} |f'(b) - f'(a)|$.

2) En déduire qu'il existe a, b dans $]0, 1[$ tels que : $\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4$.

□ **Exercice 94** Donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)\cdots(x^2+n)} dx$$

□ **Exercice 95** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_1, \dots, a_n, p_1, \dots, p_n$ tels que

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \quad \text{et} \quad p_1 > 0, \dots, p_n > 0$$

1) Représenter graphiquement $\varphi : x \mapsto x - \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{x-a_j}$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donner un sens $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(t)) dt$, et la calculer.

3) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} - \frac{p^2}{2t^2}} dt, p > 0$ puis $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} e^{-st - \frac{p}{t}} dt, s > 0, p > 0$.

Réduction I

1 Applications du cours

A Réduction de matrices de petite taille

□ **Exercice 1** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} - a & 1 + a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres ? La diagonaliser ou la trigonaliser.

□ **Exercice 2** Etudier la diagonalisabilité de la matrice : $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a) & b \operatorname{sh}(a) \\ \frac{\operatorname{sh}(a)}{b} & \operatorname{ch}(a) \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

□ **Exercice 3** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\operatorname{rg}(A)$, $\det(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$ et les éléments propres de A .

□ **Exercice 4** Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 5** Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 \\ -5 & -6 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe α et β tels que A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 6** Etudier la diagonalisabilité de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et la diagonaliser quand c'est possible.

□ **Exercice 7** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 \\ 4 & -4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Sans aucun calcul donner le plus d'informations possible sur A (rang, éléments propres...).

□ **Exercice 8** Rechercher les valeurs propres (réelles, puis complexes) et les sous-espaces propres associés des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$? Si ce n'est pas le cas, les trigonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 9** Rechercher les valeurs propres (réelles, puis complexes) et les sous-espaces propres associés des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$? Si ce n'est pas le cas, les trigonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 10** Rechercher les valeurs propres (réelles, puis complexes) et les sous-espaces propres associés des matrices suivantes; sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$? si ce n'est pas le cas, les trigonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & -3 & -5 \\ 4 & -4 & -1 & -4 \\ -4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -13 & 8 & 7 & 16 \\ -8 & 6 & 4 & 9 \\ -7 & 6 & 3 & 8 \\ -4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & -8 & -4 \\ -6 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 11** Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

Montrer que l'on peut choisir a et b pour que les deux matrices soient semblables. Déterminer la matrice de passage.

□ **Exercice 12** Diagonaliser la matrice suivante, dans le cas où elle est diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (a \in \mathbf{C}),$$

□ **Exercice 13** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Sans aucun calcul déterminer les éléments propres de A et sa diagonalisabilité.

□ **Exercice 14** Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on pose $f_k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f_k : x \mapsto e^{kx}$.

On considère $E = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ et $\varphi : E \rightarrow E$ définie par

$$\varphi : f \mapsto f'' - 3f' + 2f$$

- 1) Vérifier que pour tout $f \in E$, $\varphi(f)$ appartient bien à E et que φ est linéaire.
- 2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

B Réduction de matrices

□ **Exercice 15** Soit $n \geq 1$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$, avec $a_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ b & \text{si } i+j \text{ est impair} \end{cases}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{2n}$ canonique associé à A .

Soit $u_1 = e_1 + e_3 + \dots + e_{2n-1}$, $u_2 = e_2 + e_4 + \dots + e_{2n}$ où $(e_1, e_2, \dots, e_{2n})$ est la base canonique de $\mathbf{R}^{2n}$.

- 1) Montrer que u stabilise $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$. Montrer que $(u_1, u_2, e_3, \dots, e_{2n})$ est une base de $\mathbf{R}^{2n}$ et écrire la matrice de u dans cette base.
- 2) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?

□ **Exercice 16** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $a_{ij} = 1$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Donner le spectre de A et l'ordre de multiplicité des valeurs propres. Donner un vecteur propre associé à la valeur propre simple.

□ **Exercice 17** Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Donner ses valeurs propres, réduire A , en déduire $\det(A)$.

□ **Exercice 18** Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$; soit un scalaire $a \in \mathbf{K}$. Étudier la diagonalisabilité et étudier les éléments propres de la matrice carrée d'ordre n :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 19** Soit $k \in \mathbf{R}$. Déterminer les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ k & \dots & k & 1 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 20** Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$; soient des scalaires $a_1, a_2, \dots, a_n$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice carrée d'ordre n :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 21** Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$; soient des scalaires $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice carrée d'ordre n :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

C Trigonalisation

□ **Exercice 22** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair. Calculer $\det(A)$ et $\text{tr}(A)$.

□ **Exercice 23** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + 5A^2 + 4I_n = 0$. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

□ **Exercice 24** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$; Montrer que $\det(A) > 0$.

□ **Exercice 25** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que $\text{tr}(A)$ appartient à $\mathbb{Z}$.

D Matrices et endomorphismes nilpotents

□ **Exercice 26** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente de rang $n - 1$.

Montrer que $A^{n-1} \neq 0$. En déduire que A est semblable à $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

□ **Exercice 27** Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à : $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer N^5 .
- 2) Déterminer les valeurs propres de f .
- 3) Déterminer le polynôme caractéristique de f .
- 4) Calculer $\det(I_5 + N)$.
- 5) Donner l'expression de l'inverse de $I_5 + N$ en fonction de N .

□ **Exercice 28**

- 1) Montrer que si f est un endomorphisme de E , alors si k est un entier naturel, alors :

- a) $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$
- b) $(\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})) \implies (\forall m \geq k, \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^m))$
- c) $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$.

Dorénavant, E est de dimension finie $n > 0$.

- 2) Montrer qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas injectif.

- 3) Dans les questions c) et d), on suppose que f est un endomorphisme nilpotent autre que $0_{\mathcal{L}(E)}$. On rappelle que l'indice de nilpotence de f est l'unique entier naturel p tel que :

$$f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}, f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}, \dots, f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}, f^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad (p \geq 2)$$

Montrer que : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(f^p) = E$.

Montrer que toutes ces inclusions sont strictes. En déduire : $p \leq n$.

- 4) Soit u un vecteur de E tel que : $f^{p-1}(u) \neq 0_E$
Montrer que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre.
Retrouver alors que l'on a : $p \leq n$.
- 5) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout entier naturel k compris entre 1 et n , on pose : $F_k = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.
On suppose que f est un endomorphisme de E tel que :

$$f(e_1) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall k \in \{2, \dots, n\} \quad f(e_k) \in F_{k-1}$$

Montrer que f est nilpotent.

- 6) Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :
- i) f est nilpotent
 - ii) $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 - iii) il existe une base où la matrice de f est triangulaire supérieure avec diagonale nulle.

E Matrices définies par blocs

□ **Exercice 29** Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ -A & I_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$

- 1) Etudier les éléments propres de M en fonction de ceux de A^2 .
- 2) Démontrer l'équivalence suivante :

$$(A \text{ est diagonalisable}) \iff (A^2 \text{ est diagonalisable}) \iff (M \text{ est diagonalisable})$$

- 3) Que dire si A n'est pas inversible ?

□ **Exercice 30** Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il s'agit de démontrer que le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA , pour cela, calculer CD et DC avec $C = \left(\begin{array}{c|c} A & XI_n \\ I_n & 0 \end{array} \right)$ et $D = \left(\begin{array}{c|c} B & -XI_n \\ -I_n & A \end{array} \right)$.

F Calculs de puissances

□ **Exercice 31** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) telle que : $\begin{cases} \forall i = 1, \dots, n & a_{ii} = \alpha + \beta \\ \forall i \neq j & a_{ij} = \beta \end{cases}$

- 1) Déterminer ses éléments propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- 2) Calculer les puissances de A .
- 3) Quelles sont les matrices A inversibles ? Déterminer alors A^{-1} .

□ **Exercice 32** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ P &\mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP' \end{aligned}$$

- 1) Justifier la linéarité de f et déterminer la matrice M de f dans la base canonique.
- 2) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

3) Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

□ **Exercice 33** Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$$

G Matrices semblables

□ **Exercice 34** Montrer que pour tout réel a les matrices A_a et B_a sont semblables avec :

$$A_a = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}, B_a = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 35** Soient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient $A' = A - I_4$ et $B' = B - I_4$.

1) Montrer que A' et B' sont semblables.

2) Montrer que A et B sont semblables.

□ **Exercice 36** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

□ **Exercice 37** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$. Montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 38**

Soient M et M' des matrices appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulles et nilpotentes : montrer que M et M' sont semblables.

On pourra commencer par montrer que $M^2 = 0$.

H Divers

□ **Exercice 39** Soit S l'espace vectoriel des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle linéaire :

$$f'' + f' + f = 0$$

1) Montrer que : $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de S .

2) Déterminer D^3 . L'endomorphisme D est-il diagonalisable ?

□ **Exercice 40** Soient $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On considère

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow E \\ P &\mapsto (X^2 - 1)P' - 2(nX + a)P \end{aligned}$$

- 1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
- 2) Déterminer les éléments propres de f .

□ **Exercice 41** Soit $a \in \mathbf{R}^*$ et soit u l'application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans lui-même qui à $P(X)$ associe $P(X - a)$. Déterminer les éléments propres de u .

I Commutants, racines

□ **Exercice 42** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Montrer que A est diagonalisable. On appelle D une matrice diagonale semblable à A .
- 2) Montrer que (I_3, D, D^2) est une base du sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
- 3) Soit M un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - i) $AM = MA$
 - ii) il existe a, b, c éléments de $\mathbf{R}$ tels que $M = aI_3 + bA + cA^2$

□ **Exercice 43** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4i \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C}) / XA = AX\}$.
- 2) Déterminer $R(A) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C}) / X^2 = A\}$.

□ **Exercice 44**

- 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer que M est diagonalisable.
- 2) Résoudre $M^2 = A$.

□ **Exercice 45** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- 2) Déterminer le commutant de A .
- 3) Calculer les puissances de A

J Endomorphismes d'espaces de matrices

□ **Exercice 46** Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $f : M \mapsto M^T$.

- 1) Étudier la diagonalisabilité de f et ses éléments propres.
- 2) Déterminer $\det(f)$ et $\text{tr}(f)$.

□ **Exercice 47** Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $f : M \mapsto M^T - M$. Étudier la diagonalisabilité de f et ses éléments propres.

2 Exercices plus élaborés

A Réduction de matrices de petite taille

□ **Exercice 48** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d, e, f) pour que la

matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ soit diagonalisable.

□ **Exercice 49** Déterminer a, b, c, d pour que $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ait une valeur propre d'ordre de multiplicité 5.

B Réduction de matrices

□ **Exercice 50** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses directions propres.

On pourra dans un premier temps supposer les a_i deux à deux distincts.

□ **Exercice 51** Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $C = AB^\top$.

- 1) Déterminer le rang et la trace de C .
- 2) Déterminer le polynôme caractéristique de C .
- 3) La matrice C est-elle trigonalisable ?
- 4) La matrice C est-elle diagonalisable ?

□ **Exercice 52** Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, non nul et $A = XX^\top$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Discuter selon que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

□ **Exercice 53** On considère n nombres complexes non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ et M la matrice : $M =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les cas où M est diagonalisable, et donner alors une matrice diagonale à laquelle elle est semblable.

□ **Exercice 54** Diagonaliser la matrice suivante, dans le cas où elle est diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

$((a, b) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*)$

□ **Exercice 55** Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $MX = \lambda X$. On pose $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite finie $(x_k)_{0 \leq k \leq n+1}$.

2) En déduire les valeurs propres et vecteurs propres de M .

3) La matrice M est-elle diagonalisable ?

□ **Exercice 56** Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_2 + b_2 & b_3 & & \vdots \\ \vdots & b_2 & a_3 + b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a_n + b_n \end{pmatrix}$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket; , b_i > 0 ; \forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket; , i \neq j \implies a_i \neq a_j$$

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

□ **Exercice 57** Soit A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que

$$P_n(x) = \det(A_n - xI_n) = (-1)^n((x-1)^n - x^{n-2}).$$

2) Montrer que P_n possède une unique racine strictement supérieure à 1, notée λ_n .

3) Montrer $\lambda_n \sim \frac{n}{2 \ln n}$.

□ **Exercice 58** (Matrices de permutations II) Soit n un entier strictement positif et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

On note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (P_\sigma)[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit σ, σ' deux permutations de $\mathfrak{S}_n$. Elles sont dites conjuguées s'il existe une permutation τ telle que $\sigma' = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$.

1) Vérifier que pour σ, σ' dans S_n , $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

2) Montrer que si σ et σ' sont conjuguées alors P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

3) Réciproquement, soit σ et σ' deux permutations telles que P_σ et $P_{\sigma'}$ soient semblables. On note $c_1(\sigma)$ (resp. $c_1(\sigma')$) le nombre de points fixes de σ (resp. σ'). Pour tout entier k compris entre 2 et n , on note $c_k(\sigma)$ (resp. $c_k(\sigma')$) le nombre de k -cycles dans la décomposition de σ (resp. de σ') en cycles à supports disjoints.

- a) Montrer que $\chi_{P_\sigma} = \prod_{k=1}^n (X^k - 1)^{c_k(\sigma)}$. On pourra montrer que P_σ est semblable à une matrice diagonale par blocs d'une forme intéressante.
- b) En déduire que
- $$\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{m|k} c_k(\sigma) = \sum_{m|k} c_k(\sigma')$$
- puis que
- $$\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, c_m(\sigma) = c_m(\sigma')$$
- c) Soit $\gamma = (a_1, \dots, a_p)$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Calculer $\tau \circ \gamma \circ \tau^{-1}$.
- d) En déduire que σ et σ' sont conjuguées.

C Matrices et endomorphismes nilpotents

- **Exercice 59** Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\text{rg}(A) < n$ si et seulement si A est équivalente à une matrice nilpotente.
- **Exercice 60** Soit E un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E . On suppose que v est nilpotent et $u \circ v = v \circ u$. Montrer que :
- 1) $(u + v)$ est inversible $\iff u$ est inversible.
 - 2) $\det(u + v) = \det(u)$
- On pourra commencer par traiter le cas où u est inversible.*
- **Exercice 61** Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A + tB$ soit nilpotente pour $n + 1$ scalaires t distincts. Montrer que A et B sont nilpotentes.

D Sous espaces stables

- **Exercice 62** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et u son endomorphisme canoniquement associé à A . Montrer qu'un plan P d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par u si et seulement si le vecteur $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ est vecteur propre de $A^\top$.
- **Exercice 63** Trouver tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ stables par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Exercice 64** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ ($n \geq 2$) tel que $f \circ f = -\text{id}$. On pose $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 1) Montrer que n est pair.
 - 2) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = C = \begin{pmatrix} H & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H \end{pmatrix}$$

On propose trois méthodes :

- a) Diagonaliser $A = \text{Mat}_{\text{can}}(f)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, et en déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est C .
- b) Soit e_1 un vecteur non nul. Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est libre. Soit e_2 un vecteur tel que $(e_1, f(e_1), e_2)$ soit libre. Montrer que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est libre. Itérer et conclure.

c) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = D = \left(\begin{array}{c|c} H & L \\ \hline 0_{n-2,2} & A' \end{array} \right)$$

Montrer que D est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} H & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & B \end{array} \right)$.

Montrer que $B^2 + I_{n-2} = 0$, itérer et conclure.

□ **Exercice 65** Soit D l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par $D : P \mapsto P'$. Déterminer tous les sous-espaces-vectoriels de $\mathbf{R}_n[X]$ stables par D .

E Matrices semblables

□ **Exercice 66** Démontrer que deux matrices réelles A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ le sont également dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On pourra considérer l'égalité $A(P_1 + iP_2) = (P_1 + iP_2)B$ où P_1 et P_2 sont réelles, puis l'application $t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$.

□ **Exercice 67** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ admettant pour valeurs propres $a + ib$ et $a - ib$, a et b étant deux réels, b non nul. Montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ à $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 68** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $C = AB - BA$.

1) Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tel que $C = AB - BA = \alpha B$ alors B est nilpotente.

On pourra calculer $AB^k - B^kA$ pour $k \in \mathbf{N}^*$ puis considérer

$$\varphi : M \mapsto AM - MA$$

2) **Applications** : soient $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ non toutes nulle telles que :

$$AB - BA = 2B, \quad AC - CA = -2C, \quad BC - CB = A$$

a) Montrer que $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

b) Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que B est semblable à $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et en déduire que A est diagonalisable. Reprendre alors les hypothèses en utilisant une base de diagonalisation de A .

F Divers

□ **Exercice 69** Soit

$$\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}); \forall (i, j) \ m_{i,j} \geq 0, \forall j \sum_{i=1}^3 m_{i,j} = 1\}.$$

- 1) Montrer que 1 est valeur propre de tout élément de $\mathcal{S}$.
- 2) Si $M \in \mathcal{S}$ vérifie de plus $m_{i,j} > 0$ pour tout (i, j) , montrer qu'alors 1 est valeur propre simple de M .

□ **Exercice 70** Soit E un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, u et v deux endomorphismes de E ayant chacun n valeurs propres deux à deux distinctes.

Montrer que u et v commutent si et seulement s'ils ont mêmes vecteurs propres.

□ **Exercice 71** Dans $E = \mathbf{R}_n[X]$, soit A un polynôme fixé de E , de degré d non nul, et φ l'application

$$P \mapsto \varphi(P) = (AP)^{(n)}$$

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de E , injectif si et seulement si $d = n$
- 2) Décrire la matrice de φ dans la base canonique de E , et en déduire les valeurs propres de φ .
- 3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur d pour que φ soit diagonalisable.

□ **Exercice 72** Soit A un polynôme à coefficients réels de degré 2 donné. Au polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n$ on fait correspondre le polynôme $Q = AP' - nA'P$.

- 1) Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme Φ de $\mathbf{R}_{2n}[X]$.
- 2) Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ dans les cas particuliers :
 - a) $A = X^2 - 1$
 - b) $A = X^2$
 - c) $A = X^2 + 1$

□ **Exercice 73** Soit ψ l'application qui à $P \in E = \mathbf{R}[X]$ associe $\psi(P) = P(X+1) + P(X)$

- 1) Vérifier que $\psi \in \mathcal{L}(E)$. Trouver sa seule valeur propre et l'espace propre associé.
- 2) L'application ψ est-elle injective ? Peut-on dire que c'est un automorphisme de E ?
- 3)
 - a) Montrer que si $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[X]$ est stable par ψ
 - b) Montrer que l'induite ψ_n de ψ à $\mathbf{R}_n[X]$ est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$
 - c) Montrer que ψ est un automorphisme de E
- 4) Montrer qu'il existe une suite unique $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad \psi(P_n) = 2X^n$
 Degré de P_n ? Coefficient dominant ? Calculer P_0 , P_1 et P_2 . Comparer $P_n(0)$ et $P_n(1)$
- 5) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$

□ **Exercice 74** Soit $n \geq 1$. On pose $E = \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

- 1) Montrer qu'il existe une famille $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que :

$$\forall P \in E \quad P(X) = \sum_{k=1}^n a_k P(X+k)$$

- 2) On considère l'application $\Delta : P \in E \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer $\text{Ker}(\Delta)$, $\text{Im}(\Delta)$, $\Delta^m(P)$ pour $m \in \mathbf{N}^*$ et les nombres a_k .

□ **Exercice 75** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $B = \text{Com}(A)^\top$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B .

□ **Exercice 76** Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A .

□ **Exercice 77** (Matrices à diagonale strictement dominante-Théorème de Gerschgorin)

- 1) $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $n \geq 2$, telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$.

Montrer que A est inversible.

- 2) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$; on pose, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$.

Montrer que, si : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $|\lambda - a_{ii}| > r_i$, alors $A - \lambda I$ est inversible.

En déduire que le spectre de A est inclus dans la réunion des disques de centre a_{ii} et de rayon r_i .

G Endomorphisme d'espaces de matrices

□ **Exercice 78** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, telle que $\text{tr}(A) \neq 0$. On considère $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $f : A \mapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$.

- 1) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- 2) Etudier la diagonalisabilité de f et ses éléments propres.

□ **Exercice 79** Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, p un projecteur de E . On considère $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi : f \mapsto \frac{1}{2}(p \circ f + f \circ p)$.

Vérifier que φ est linéaire; déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 80** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer le spectre de A .
- 2) Soit $B = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k$ ($p \in \mathbf{N}^*$). Montrer que :
(B est inversible) $\iff$ (n et p sont premiers entre eux)

□ **Exercice 81** (Matrices stochastiques)

On suppose que $A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$, tous ses coefficients a_{ij} étant positifs, et telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

- 1) Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1, et que 1 est valeur propre de A .
- 2) Si $X \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ est un vecteur propre associé à λ de module 1, avec $\|X\|_\infty = 1$, montrer que toute coordonnée de AX de module 1 est aussi coordonnée de X .

Montrer qu'un tel λ est racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

□ **Exercice 82** Soit $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$. On note $a(t) \leq b(t) \leq c(t)$ les valeurs propres réelles de $M(t)$.

- 1) Montrer que : $a(t) < 0 < b(t) < 2 < c(t)$.
- 2) Montrer que $a(t)$ tend vers 0 et $b(t)$ tend vers 2 quand t tend vers $+\infty$. Montrer que : $c(t) = t + O_{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)$.
- 3) Montrer que si $n \geq 1$, $\text{tr}(M(1)^n)$ est l'entier le plus proche de $c(1)^n + 1$.

Suites et séries de fonctions

A Type de convergence d'une suite de fonctions

□ **Exercice 1** Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n-1 \text{ ou } x \geq n+1 \\ x-n+1 & \text{si } x \in [n-1, n] \\ n+1-x & \text{si } x \in [n, n+1] \end{cases}$$

- 1) Dessiner le graphe de f_1, f_5, f_{10} .
- 2) Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbf{R}$ de la suite de fonctions f_n .
- 3) Reprendre les mêmes questions pour les suites (g_n) et (h_n) définies par :

$$g_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n-1 \text{ ou } x \geq n+1 \\ \frac{x-n+1}{n} & \text{si } x \in [n-1, n] \\ \frac{n+1-x}{n} & \text{si } x \in [n, n+1] \end{cases}$$

$$h_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n-1 \text{ ou } x \geq n+1 \\ n(x-n+1) & \text{si } x \in [n-1, n] \\ n(n+1-x) & \text{si } x \in [n, n+1] \end{cases}$$

□ **Exercice 2** Etudier (convergence simple, convergence uniforme) les suites de fonctions suivantes (en cas de non convergence uniforme sur l'intervalle de définition, on cherchera éventuellement des sous-intervalles où il y a convergence uniforme) :

- Sur $[0, 1]$

$$a) \quad f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^4} \quad b) \quad f_n : x \mapsto \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} \quad c) \quad f_n : x \mapsto \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} \quad d) \quad f_n : x \mapsto \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}$$

- Sur $[0, +\infty[$

$$e) \quad f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+nx} \quad f) \quad f_n : x \mapsto nx^2e^{-nx} \quad g) \quad f_n : x \mapsto f_n(x) = nx^2e^{-\sqrt{n}x} \quad h) \quad f_n : x \mapsto \frac{x \sin \frac{x}{n}}{x + \frac{1}{n}}$$

□ **Exercice 3**

- 1) Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions f_n définies par $f_n : x \mapsto \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.
- 2) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} dx$.

□ **Exercice 4** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{-n^2}$.

- 1) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbf{R}_+$
- 2) Étudiez sa convergence uniforme de deux manières différentes :
 - a) En étudiant les variations des fonctions $f_n - f$ (où f désigne la limite simple de la suite (f_n)).
 - b) En montrant d'abord qu'il y a convergence uniforme sur tout segment (on pourra utiliser, en le justifiant, que la fonction exponentielle est lipschitzienne sur $]-\infty, 0]$ et un encadrement de $\ln(1+h)$ pour $h \in [0, b]$, à b fixé)

□ **Exercice 5** Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $(g_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, g_n : x \mapsto \frac{(f(x))^2}{\sqrt{(f(x))^2 + \frac{1}{n}}}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (g_n) sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 6** Type de convergence de la suite de fonctions (S_n) définies par : $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{kx}}{k+n}$.

□ **Exercice 7** Soit $f_n : x \mapsto \frac{n^2 x}{(1+n^2 x^2)^2}$.

- 1) Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
- 2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.
- 3) Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$. On veut déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) g(x) dx$. Nous allons le faire de deux méthodes différentes :
 - Réaliser le changement de variables $t = nx$ puis utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite.
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x)(g(x) - g(0)) dx = 0$.
On pourra utiliser que la fonction $x \mapsto g(x) - g(0)$ est continue et s'annule en 0 pour découper intelligemment l'intégrale en deux.

□ **Exercice 8** Soit (f_n) la suite de fonctions définie par :

$$\forall x \in [0, \pi], f_n(x) = \cos^n(x) \sin(x)$$

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme de (f_n) .

□ **Exercice 9** Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0, 1]$ (puis éventuellement sur des sous-intervalles de $[0, 1]$) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = n^\alpha e^{-nx} x^\beta$$

où α, β sont des réels sur lesquels on discutera.

□ **Exercice 10** Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad f_n(x) = \cos \frac{nx}{n+1}$$

□ **Exercice 11** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad , \quad f_n : x \mapsto n^\alpha \sin x \cos^n x$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n$. Qu'en penser ?

□ **Exercice 12** On considère la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in [0, 1] \quad g_n(t) = n(n+1)t^{n-1} \sin(\pi t)$$

Comparer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt$$

Que peut-on en conclure quant à la convergence uniforme de la suite (g_n) ?

□ **Exercice 13** Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = nx^n(1-x)$$

converge simplement et non uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$$

□ **Exercice 14** On pose $f_0 : t \mapsto 0$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et $t \geq 0$,

$$f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$$

- 1) Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
- 2) Justifier que $(f_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}_+$.
- 3) Soit $a > 0$, montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

□ **Exercice 15** Montrer que la suite :

$$\begin{array}{ccc} f_n & : & [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \rightarrow & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{array}$$

formée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$, converge uniformément vers une application qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

□ **Exercice 16** Soit l'application f_n ($n \in \mathbf{N}^*$) :

$$\begin{array}{ccc} f_n & : & [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \\ t & \mapsto & nt^n \sin(\pi t) \end{array}$$

- 1) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
- 2) Soit l'application φ_n ($n \in \mathbf{N}^*$) :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_n & : & \left[0, \frac{1}{2}\left[\cup\right]\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \tan(\pi t) + \frac{\pi t}{n} \end{array}$$

Étudier les variations de φ_n .

Montrer qu'il existe un unique élément de $\left]0, \frac{1}{2}\left[\cup\right]\frac{1}{2}, 1\right]$, qu'on notera t_n , tel que $\varphi_n(t_n) = 0$.

3) Montrer que f_n atteint son maximum en t_n .

4) Etude d'un développement de t_n

a) Exprimer, si n est naturel non nul, t_n à l'aide de la fonction arctan.

b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1$, puis un équivalent de $t_n - 1$.

Donner alors un développement de t_n à la précision $\frac{1}{n}$.

5) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$.

□ **Exercice 17** Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions définie sur $I = \mathbf{R}_+$. On suppose que

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n(0) = 0$
- La suite $(f'_n + 2f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur I vers l'application nulle.

Montrer que (f_n) converge uniformément vers $\tilde{0}$ sur I .

□ **Exercice 18** Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par $f_n : t \mapsto \frac{2nt^2}{2nt + 1}$.

1) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) .

2) Mêmes questions avec le suite de fonctions (g_n) :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], g_n(t) = 0 \text{ et } \forall t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], g_n(t) = f_n(t) \sin\left(\frac{\pi}{t}\right)$$

B Étude du type de convergence d'une série de fonctions

□ **Exercice 19** Si $z \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose : $f_n(z) = \frac{z}{(1+|z|)^n}$

1) Montrer que la série $\sum f_n(z)$ est absolument convergente et calculer sa somme.

2) Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\{z \in \mathbf{C} / |z| \geq a\}$.

□ **Exercice 20** Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout x dans $\mathbf{R}$, on pose $f_n(x) = \sin(x)(\cos x)^n$.

1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$.

2) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, \pi - a]$, avec $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

3) Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, \pi]$.

□ **Exercice 21** Soit $f_n(t) = n \sin(t) \cos^n(t)$ avec $n \geq 1$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) À t fixé, donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$.

2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt$. Que peut-on en déduire ?

□ **Exercice 22** Soit $R \in]-1, 1[$. Étudier la convergence normale et calculer la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto R^n \cos(nx)$.

□ **Exercice 23** Étudier les convergences normale, simple et uniforme des séries de fonctions $\sum f_n$ définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{R}$. Préciser éventuellement s'il y a convergence normale ou uniforme sur des intervalles plus petits.

1) $I =]1, +\infty[$ $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+x^n}$

2) $I = \mathbf{R}$ $f_n : x \mapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$

3) $I = \mathbf{R}$ $f_n : x \mapsto \frac{x}{n^\alpha(1+n^2x^2)}$ discuter selon α

4) $I = [0, +\infty[$ $f_n : x \mapsto nx \cdot e^{-nx} \cdot \sin x$

5) $I = [0, +\infty[$ $f_n : x \mapsto x^\alpha \cdot e^{-nx}$ où $\alpha > 0$

□ **Exercice 24** Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ définie par

$$\forall n \geq 2 \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad u_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$$

converge uniformément sur $\mathbf{R} +$, mais pas normalement.

□ **Exercice 25** Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq \frac{1}{n} \\ x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ \frac{1}{n} - x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

- 1) Dessiner le graphe de f_1, f_5, f_{10}
- 2) Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbf{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
- 3) Etudier la convergence normale sur $\mathbf{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
- 4) Etudier la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

□ **Exercice 26** Soit la fonction de variable réelle $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.

- 1) La série de fonction converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
- 2) Étudier l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité de f . Calculer f .

□ **Exercice 27** On pose $u_n(x) = \text{th}(x+n) - \text{th}(n)$.

- 1) Etudier la convergence simple de la série $\sum u_n$.
- 2) Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbf{R}$.
- 3) Déterminer un réel a tel que $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

□ **Exercice 28**

- 1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout x dans $\mathbf{R}_+$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.
 - a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$ et donner sa somme.
 - b) $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}_+$?
 - c) $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}_+$?

□ **Exercice 29** Soit la série de fonctions $\sum f_n$ où : $\forall x \in \mathbf{R} \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{(1+|x|)^n}$.

- 1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Quelle est sa somme ?
- 2) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $] -\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, où a est un réel strictement positif.
- 3) Montrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers l'application nulle sur $\mathbf{R}$. Qu'en conclure ?

□ **Exercice 30** Soit la série de fonctions $\sum f_n$ où : $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = x^n(1-x)^n$. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum (f_n)$ sur $[0, 1]$, calculer sa somme.

□ **Exercice 31** Soit $a > 0$, et f une fonction continue de $[0, a]$ dans $\mathbf{R}$. On définit la suite de fonctions (f_n) par : $f_0 = f$, et $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0, a], f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$. Étudier la convergence (simple et uniforme) de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (f_n)$ et calculer sa somme.

□ **Exercice 32** Soit $g : x \mapsto e^{-x^2}$.

- 1) Montrer que : $\exists k \in [0, 1[, \forall x \in \mathbf{R}, |g'(x)| \leq k$
- 2) Soit la suite de fonction (f_n) définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f_0(x) = x, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, f_n(x) = g(f_{n-1}(x))$$

- a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (f_{n-1}(x) - f_n(x))$.
- b) Que peut-on en déduire pour la suite (f_n) ?

C Étude de fonctions définies comme la somme d'une série de fonctions

□ **Exercice 33** Pour tout entier naturel n non nul on pose

$$f_n : [-\ln(2), +\infty[\rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{(1 - e^{-x})^n}{n^2}$$

On considère la série de fonctions : $\sum_{n \geq 1} f_n$

- 1) Montrer que la série de fonction converge simplement. On note f la fonction somme.
- 2) Montrer que f est continue sur $[-\ln(2), +\infty[$.
- 3) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- 4) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\ln(2), +\infty[$, et calculer $f'(x)$.
- 5) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\ln(2), +\infty[$?

□ **Exercice 34** Soit f la fonction définie par

$$f : x \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1 + n^2x^2)}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
- 2) Étudier de la continuité de f sur $\mathcal{D}_f$ et sa dérivabilité sur $\mathcal{D}_f \setminus \{0\}$
- 3) Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ par deux méthodes.
- 4) Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $f(x)$ en $+\infty$.

- 5) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

On pourra utiliser la technique de comparaison à une intégrale.

- 6) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

□ **Exercice 35** Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}$$

On considère la série de fonctions $\sum f_n$.

- 1) Étudier la convergence simple de cette série de fonctions. On note f sa somme.
- 2) Étudier la continuité de f puis sa dérivabilité.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.
- 4) Reprendre l'exercice avec la suite de fonctions $\sum g_n$ où $g_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1 + n}$.

□ **Exercice 36** Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{(n^2 + x^2)^2}$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .

□ **Exercice 37** Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 x^2}\right)$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . Montrer que f est continue sur D_f .
- 2) Calculer, si elle existe, la limite de f en $+\infty$.
- 3) Montrer les inégalités suivantes pour $n \geq 1$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2(n+1)^2}\right) \leq \int_n^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) dy \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x^2 n^2}\right)$$

- 4) En déduire un encadrement de f , puis un équivalent de f en 0.

□ **Exercice 38** Soit $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Étudier la continuité de f , puis la dérivabilité de f .
- 3) Calculer f .

□ **Exercice 39** Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D de S .
- 2) La fonction S est-elle continue sur D ?
- 3) La fonction S est-elle intégrable sur D ?

□ **Exercice 40** On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{x}{1 + n^2 x^2}$.

- 1) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $\mathbf{R}$. On note f sa somme.
- 2) Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $\mathbf{R}$.
Déterminer des sous-intervalles de $\mathbf{R}$ sur lesquels la série de fonctions converge normalement.
Que peut-on en déduire pour la continuité de f ?

- 3) Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}$.

- 4) Soit $x > 0$ fixé. Déterminer un encadrement de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$.

On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.

En déduire un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers 0.

Déterminer alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et en déduire que f n'est pas continue en 0.

- 5) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 41** Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx)$.

- 1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. On note f sa somme.

Justifier que f est impaire et π périodique.

- 2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$.
- 3) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, \pi[$. En déduire f sur $]0, \pi[$. Tracer le graphe de f sur $\mathbf{R}$.
- 4) La fonction f est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

□ **Exercice 42** Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition I de f .
- 2) La fonction f est-elle continue sur I ? de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ?
- 3) Déterminer la limite de f en 0, puis un équivalent de f en 0.

□ **Exercice 43** On pose, pour n entier naturel non nul : $u_n(x) = \frac{2x}{(n\pi)^2 - x^2}$.

- 1) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$. Étudier la continuité de la fonction somme S sur $] -\pi, \pi[$.
- 2) Transformer $f(x) = \frac{1}{x} - S(x)$ comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n f_k(x)$, avec $f_n(x)$ fraction rationnelle en x .
- 3) Exhiber une relation entre $f(x + \pi)$ et $f(x)$.

□ **Exercice 44** Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$, f non identiquement nulle sur $\mathbf{R}$, et telle que :

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Pour $n \geq 0$ on pose $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f_n : x \mapsto f(nx)$.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) , puis sa convergence uniforme sur $\mathbf{R}_+$ et finalement sa convergence uniforme sur $[\alpha, +\infty[$ où $\alpha > 0$.

□ **Exercice 45** On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + x^2}$.

- 1) Étudier la convergence simple. On note f sa somme lorsqu'elle existe.
- 2) Montrer que la fonction f ainsi définie est continue, puis $\mathcal{C}^\infty$.

□ **Exercice 46** On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{n}{n + n^2 x}$

- 1) Étudier la convergence simple. On note f sa somme lorsqu'elle existe.
- 2) La fonction f est-elle continue.
- 3) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

□ **Exercice 47** On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.

On note f sa somme.

- 1) Étudier l'ensemble de définition et la continuité de f .
- 2) Étudier les variations de f et sa concavité.
- 3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 4) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$
- 5) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ et déterminer un équivalent de $f'(x)$ au voisinage de $+\infty$.
- 6) En déduire un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
- 7) Donner l'allure du graphe de f

□ **Exercice 48** On pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

- 1) Donner le domaine de définition de f .
- 2) Étudier la dérivabilité de f . Calculer $f'(x)$, puis $f(x)$.

□ **Exercice 49**

- 1) Justifier la définition et la continuité sur $\mathbf{R}$ de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f_n(x)$ où $f_n : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.
- 2) A l'aide du théorème de la double limite, montrer que $f(x) \underset{0}{\sim} x \ln 2$.

3) Etablir : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (f_n(x) - f_{n+1}(x))$.

En déduire que : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$

On pourra utiliser, pour x fixé, la convexité de la fonction $t \mapsto \arctan \frac{x}{t}$.

□ **Exercice 50** On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$.

On note f sa somme.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f . Étudier la continuité, la classe $\mathcal{C}^1$ de f .
- 2) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
- 3) Déterminer un équivalent de f en 0^+ .
- 4) On veut déterminer un équivalent de f en $+\infty$. On propose deux méthodes
 - a) Montrer qu'il existe une constante K telle que pour $x > 0$

$$f(x) = K \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})} dt$$

Déterminer un équivalent quand $x \rightarrow +\infty$ de l'intégrale du terme de droite et conclure.

b) Soit $x > 0$, calculer $f(x) + f(x+1)$ et retrouver l'équivalent trouvé ci-dessus.

□ **Exercice 51** Soit (u_n) une suite réelle strictement décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

- 1) Justifier l'existence de $\sigma_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^p$, pour $p \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Montrer que la suite $\left(\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}\right)$ converge et donner sa limite.

□ **Exercice 52**

- 1) Déterminer l'ensemble de définition I de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.
- 2) Montrer que la fonction f est continue sur I .
- 3) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur deux intervalles qu'on précisera.
- 4) Déterminer un équivalent de f en 0. Tracer le graphe de f .

□ **Exercice 53**

- 1) Justifier la définition et la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.
- 2) Trouver un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
- 3) Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} \right)$.

En déduire : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

4) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \quad \text{et} \quad f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}.$$

Retrouver ainsi les équivalents précédents.

□ **Exercice 54**

- 1) Préciser l'ensemble de définition des fonctions ζ et η définies par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

- 2) Pour $x > 1$, établir une relation entre $\zeta(x)$ et $\eta(x)$; quelles sont les limites de ζ et η en $+\infty$?
 3) Montrer que η est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$; à l'aide de $\eta(1)$ et de $\eta'(1)$, déterminer a et b réels tels que

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1) \quad \text{au } \mathcal{V}(1^+).$$

□ **Exercice 55** Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^n}{1-t^n} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\pi^2}{6(1-t)^2}$

□ **Exercice 56** On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ pour tout x de $] -1, 1[$.

- 1) Montrer que f est continue sur $] -1, 1[$.
 2) Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x)f(x)$.

□ **Exercice 57** Soit a un réel.

- 1) Soit $x \in [-\pi, \pi]$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2 + a^2}$.

$$\text{On pose } f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2 + a^2}.$$

- 2) Justifier qu'il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-\pi, \pi]$ telle que $F'' = f$. On exprimera F sous forme d'une série.
 3) Exprimer F en fonction de f .

$$\text{On pourra utiliser que : } t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{n^2} \text{ pour } t \in [-\pi, \pi].$$

- 4) En déduire f sur $[-\pi, \pi]$.

□ **Exercice 58**

- 1) Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$. Exprimer $\frac{1}{1-z}$ comme somme d'une série.
 2) En déduire une expression de $\frac{1}{1-2e^{i\theta}}$.
 3) En déduire une suite (a_n) telle que

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \frac{1 - 2 \cos \theta}{5 - 4 \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Familles sommables & Dénombrabilité

□ **Exercice 1** Rayon de convergence et somme : $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

□ **Exercice 2**

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la famille $\left(\frac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $|z| < 1$.

2) Montrer que sa somme vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}$ si $|z| < 1$.

□ **Exercice 3** Soit z est un complexe de module strictement inférieur à 1. Étudier la sommabilité de la famille $(z^{pq})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$.

□ **Exercice 4**

1) Pour $q \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que la série $\sum_{p \geq 1, p \neq q} \frac{1}{p^2 - q^2}$ converge et calculer sa somme.

2) Pour $(p, q) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$, on pose $u_{pq} = \frac{1}{p^2 - q^2}$ si $p \neq q$ et $u_{pq} = 0$ si $p = q$. Montrer que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{pq} \right) = - \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{q=1}^{+\infty} u_{pq} \right) \neq 0$$

Qu'en conclure ?

□ **Exercice 5** Montrer que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$ et tous entiers $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1 + z^{na+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{nc}}{1 - z^{na+b}}$$

□ **Exercice 6** En envisageant la suite double $\left(\frac{z^n}{p^n}\right)_{n \geq 2, p \geq 2}$, pour un complexe z tel que $|z| < 2$, montrer que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1) = \frac{1}{2}$$

où ζ est la fonction ζ de Riemann : $\forall x > 1, \zeta(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}$.

□ **Exercice 7**

1) Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = 1}}$ est sommable :

2) Calculer sa somme

On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

On pourra calculer $\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = d}} \frac{1}{p^2 q^2}$ en fonction de $\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$

□ **Exercice 8** Montrer que la famille $\left(2^{-3q-p-(p+q)^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable puis calculer sa somme.

□ **Exercice 9** Montrer que la famille $\left(\frac{p!q!}{(p+q+2)!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable puis calculer sa somme.

□ **Exercice 10** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(i_1 + \dots + i_p)^\alpha}\right)_{(i_1, \dots, i_p) \in (\mathbb{N}^*)^p}$ est sommable si et seulement si $\alpha > p$.

3) Que peut-on dire de la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{i_1^2 + \dots + i_p^2}^\alpha}\right)_{(i_1, \dots, i_p) \in (\mathbb{N}^*)^p}$?

□ **Exercice 11** Soit $(a_{p,n})_{(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ une famille de réels positifs. On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(a_{p,n})_{n \geq 1}$ est croissante et converge vers un réel α_p . On suppose de plus que la série $\sum \alpha_p$ converge.

1) Montrer que la suite $(a_{1,n} + a_{2,n} + \dots + a_{n-1,n})_{n \geq 1}$ converge et donner sa limite en fonction des α_p .

On pourra considérer la famille $(b_{p,n})_{(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ où $b_{p,n} = a_{p,n} - a_{p,n-1}$.

2) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \right]$

On pourra lire la somme de droite à gauche.

□ **Exercice 12** Soit α un réel strictement positif. Étudier la sommabilité de la famille $(e^{-(p^\alpha + q^\alpha)})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$.

□ **Exercice 13** Soit α un réel strictement positif.

Étudier la sommabilité de la famille $(e^{-\ln^\alpha(p^2 + q^2)})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$

□ **Exercice 14** Soient a et b deux réels strictement positifs. Étudier la sommabilité de la famille de terme général $u_{pq} = \frac{1}{a^p + b^q}$, $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On discutera selon les valeurs de a et b .

□ **Exercice 15** Soit G un sous-groupe strict de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus G$ n'est pas dénombrable.

□ **Exercice 16** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de boules ouvertes deux à deux disjointes de E . Montrer que I est au plus dénombrable.

□ **Exercice 17**

1) Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est algébrique s'il existe un polynôme à coefficients entiers P non nul tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est au plus dénombrable.

□ **Exercice 18** Soit $(G, *)$ un groupe. On suppose que G a une partie génératrice au plus dénombrable. Montrer que G est au plus dénombrable.

Table des matières

1	Séries numériques	2
2	Algèbre linéaire	14
3	Intégrales sur un intervalle quelconque	33
4	Réduction I	44
5	Suites et séries de fonctions	58
6	Familles sommables & Dénombrabilité	68