

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans ce problème on se donne E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E . On veut étudier les sous-espaces stables de f .

Partie I : Endomorphisme diagonalisable :

Dans cette partie on suppose que f est diagonalisable. On désigne par p le cardinal du spectre de f et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes ainsi que $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres associés.

- 1) Que dire de f si $p = 1$? En déduire les sous-espaces vectoriels de E stables par f .

On suppose par la suite que $p \geq 2$.

- 2) Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ on se donne un sous-espace vectoriel F_k de E_k .
- Justifier que les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe.
 - Montrer que $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ est un sous-espace vectoriel stable par f .
- 3) On veut montrer réciproquement que si F est un sous-espace vectoriel stable par f alors $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ où, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $F_i = F \cap E_i$.
- Donner un exemple de trois espaces vectoriels A, B et C de E tels que $A \oplus B = E$ et $(A \cap C) \oplus (B \cap C) \neq C$. On pourra se placer dans le cas où $E = \mathbb{K}^n$.
 - Justifier que pour tout x de F il existe $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.
 - Exprimer $f(x)$ en fonction de $x_1, \dots, x_p$ et en déduire qu'il existe $\mu_2, \dots, \mu_p$ tous non nuls tels que $\sum_{i=2}^p \mu_i x_i$ appartienne à F .
 - En réitérant le procédé précédent, montrer que pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $x_i \in F_i$.
 - Conclure.
- 4) En déduire que l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f sur F est diagonalisable.

Partie II : Endomorphisme nilpotent :

- 1) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que f est l'endomorphisme de dérivation $f : P \mapsto P'$.
- Montrer que pour tout $k \leq n-1$, les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}_k[X]$ sont stables par f .
 - Montrer réciproquement que si F est un sous-espace stable par f différent de $\{0\}$, il existe $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $F = \mathbb{R}_k[X]$. On pourra considérer un polynôme de degré maximal dans F .
- 2) Soit f un endomorphisme nilpotent d'ordre n . C'est-à-dire que l'on suppose que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
 - En déduire qu'il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les sous-espaces stables par f .