Partie I - L'opérateur Δ

1) a) Soit $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\Delta(\lambda u + \mu v))_n = (\lambda u + \mu v)_{n+1} - (\lambda u + \mu v)_n = \lambda(\Delta u)_n + \mu(\Delta v)_n$$

Cela montre que $\Delta(\lambda u + \mu v) = \lambda \Delta u + \mu \Delta v$; l'application Δ est donc linéaire. Comme elle est définie de E dans E, c'est un endomorphisme de E.

b) Soit $u \in \mathrm{Ker}(u)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n = 0$. Cela montre que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est constante. Réciproquement, pour une suite u constante, $\Delta u = 0$.
Finalement, $\mathrm{Ker}(\Delta) = \{\text{suites constantes}\}$.

2) Pour $p \in \mathbb{N}$ on pose $H(p)$ l'assertion :

$$H(p) : \ll \text{ pour toute suite } u \in E, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \tbinom{p}{k} u_{n+k} \gg$$

— Initialisation : Pour $p = 0$. Pour toute suite $u \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\Delta^0 u)_n = u_n = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{-k} \binom{0}{k} u_{n+k}$$

— Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose $H(p)$ et on veut montrer $H(p+1)$. On fixe une suite $u \in E$. Par définition, $\Delta^{p+1} u = \Delta(\Delta^p u)$. Notons $v = \Delta^p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(\Delta^{p+1} u)_n &= (\Delta v)_n \\
&= v_{n+1} - v_n \\
&\overset{(HR)}{=} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+1+k} - \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k} \\
&= -\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{p-k} \binom{p}{k-1} u_{n+k} - \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} \left[\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right] u_{n+k}
\end{aligned}$$

On a convenu à la dernière ligne que $\binom{p}{-1} = \binom{p+1}{p} = 0$. En utilisant alors la formule de Pascal (qui est compatible avec notre convention),

$$(\Delta^{p+1} u)_n = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} \binom{p+1}{k} u_{n+k}$$

Notre propriété est bien démontrée par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

3) Soit $r \in]0, 1[$. En appliquant la formule obtenue à la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\Delta^p b)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} r^{n+k} = (-1)^p r^n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-r)^k = (-1)^p r^n (1-r)^p$$

Partie II - Suites de moments et transformation d'Euler

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\alpha_n : t \mapsto t^n \omega(t)$ est continue et positive sur $[0,1]$. On en déduit par positivité de l'intégrale que $u_n \geqslant 0$.

Supposons par l'absurde que $u_n = 0$. On sait alors que α_n est la fonction nulle. Ce qui implique que pour tout $t > 0$, $\omega(t) = 0$ (car $t^n \neq 0$). Par continuité, on obtient alors que $\omega(0) = \lim\limits_{t \to 0} \omega(t) = 0$ et donc ω est la fonction nulle ce qui est absurde.

Cela montre bien que $u_n > 0$.

b) On vient de voir que pour tout $k \geqslant 0$, $u_k \geqslant 0$ ce qui justifie que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} (-1)^k u_k$ est alternée.

De plus, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1} - u_k = \int_0^1 t^k (t-1)\omega(t) \mathrm{d}\, t \leqslant 0$$

L'inégalité vient du fait que pour $t \in [0,1]$, $t^k(t-1)\omega(t) \leqslant 0$. On en déduit que $(u_k)_{k \geqslant 0}$ est décroissante.

Pour finir, la fonction ω est continue sur le segment $[0,1]$. En notant $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \omega(t) \leqslant M$, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 t^n M \,\mathrm{d}\, t = M \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{M}{n+1} \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

Par encadrement, $\lim(u_n) = 0$

D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} (-1)^k u_k$ converge.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k \omega(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \omega(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \omega(t) \mathrm{d}t$$

On peut effectivement utiliser la formule de la somme partielle d'une suite géométrique car pour tout $t \in [0,1]$, $-t \neq 1$.

On en déduit que

$$S_n = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}\omega(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

Le résultat voulu s'en déduit.

d) Par un majoration similaire à celle de la question 4.b)

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}\omega(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}\omega(t)}{1+t} \mathrm{d}t \leqslant M \int_0^1 t^{n+1} \mathrm{d}t = \frac{M}{n+2}$$

Cela montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}\omega(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t = 0$$

Donc, en utilisant le résultat de 4.c :

$$S = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

5) Soit n et p des entiers naturels. En utilisant la formule de la question 2)

$$\begin{aligned}
(\Delta^p u)_n &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}u_{n+k} \\
&= \int_0^1 (-1)^p t^n \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}t^k\omega(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (-1)^p t^n (1-t)^p\omega(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^n(t-1)^p\,\omega(t)\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

6) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{E}_N = \displaystyle\sum_{p=0}^{N}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$.

a) Soit $t \in [0,1]$, $\frac{1-t}{2} \neq 1$ donc

$$\sum_{p=0}^{N}\left(\frac{1-t}{2}\right)^p = \frac{1-\left(\frac{1-t}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1-t}{2}} = 2\frac{1-\left(\frac{1-t}{2}\right)^{N+1}}{1+t}$$

Le résultat est obtenu en divisant par 2.

b) Soit $N \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule de la question 5

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_N &= \sum_{p=0}^{N}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\int_0^1 t^0(t-1)^p\omega(t)\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \sum_{p=0}^{N}\frac{1}{2^{p+1}}(1-t)^p\omega(t)\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{N}\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\mathrm{d}\,t \\
&\overset{8.a}{=} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}\,t - \int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^{N+1}\frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

c) Pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t) \in [0,1]$ et donc $\frac{1-t}{2} \in [0,\frac{1}{2}]$. On en déduit en utilisant la question précédente et le fait que ω est positive que

$$|S-\mathcal{E}_N| = \left|\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^{N+1}\frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2^{N+1}}\frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}\,t = \frac{S}{2^{N+1}}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{S}{2^{N+1}} = 0$, la suite $(\mathcal{E}_N)_{N\geqslant 0}$ tend vers S. Cela signifie que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$ converge et que

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 = S = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k.$$

7) Dans cette question, on prend $\omega(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$.
Pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_n = \int_0^1 t^n\mathrm{d}\,t = \frac{1}{n+1}$$

D'autre part, d'après 4.d

$$S = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}\,t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Pour finir, pour tout $p \in \mathbb{N}$, avec la question 5

$$(\Delta^p u)_0 = \int_0^1 t^0(t-1)^p \mathrm{d}\,t = \left[\frac{(t-1)^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = -\frac{(-1)^{p+1}}{p+1} = (-1)^p \frac{1}{p+1}$$

Le résultat de la question 6.c) donne donc

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)\,2^{p+1}}.$$

Partie III - Une amélioration de la méthode

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme -1 est racine du numérateur de R_n, ce numérateur est divisible par $1+X$ donc R_n est un polynôme.
De plus le numérateur de R_n est de degré au plus n (et même exactement n si $n \neq 0$) R_n est un polynôme et qu'il est de degré au plus $n-1$ (exactement $n-1$ si $n \neq 0$, et $-\infty$ si $n = 0$).

9) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question **4.d.**,

$$\begin{aligned} S - T_n &= \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}dt - T_n \\ &= \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(-1) - (P_n(-1) - P_n(t))}{1+t}\omega(t)dt \\ &= \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(t)}{1+t}\omega(t)dt \end{aligned}$$

b) Ainsi

$$\begin{aligned} |S - T_n| &\leqslant \frac{1}{|P_n(-1)|} \int_0^1 \frac{|P_n(t)|}{1+t}\omega(t)dt \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{car } \omega \text{ est positive} \\ &\leqslant \frac{1}{|P_n(-1)|} \int_0^1 \frac{M_n}{1+t}\omega(t)dt \\ &= \frac{SM_n}{|P_n(-1)|} \end{aligned}$$

10) Dans cette question, on choisit $P_n(X) = (1-X)^n$.
Alors $M_n = 1$ car $t \mapsto 1-t$ est décroissante positive sur $[0,1]$, et $P_n(-1) = 2^n$
On a donc $|S - T_n| \leqslant \frac{S}{2^n}$.
Dans la question **6.c**. on avait obtenu un majorant de $|S - \mathcal{E}_n|$ deux fois moindre, donc meilleur que celui qu'on vient d'obtenir.

11) Dans cette question, on choisit $P_n(X) = (1-2X)^n$.
On a encore $M_n = 1$ car les bornes sur $[0,1]$ de $t \mapsto 1-2t$ sont 1 et -1. De plus $P_n(-1) = 3^n$.
On obtient $|S - T_n| \leqslant \frac{S}{3^n}$, ce qui dès le rang 2 est meilleur que la majoration de 8.c, et bien meilleur pour de grandes valeurs de n.

12) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel θ on a :

$$\begin{aligned}
\cos(2n\theta) &= Re(e^{2in\theta}) \\
&= Re\Big((\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))^{2n}\Big) \\
&= Re\Big(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \cos^{2n-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta)\Big) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} \cos^{2n-2p}(\theta)(-1)^p \sin^{2p}(\theta) \\
&\qquad\qquad \text{car } i^2 = -1 \text{ et } i^k \text{ est imaginaire pur pour } k \text{ impair} \\
&= P_n(\sin^2(\theta))
\end{aligned}$$

avec

$$P_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} (1-X)^{n-p}(-1)^p X^p$$

P_n est de degré au plus n comme somme de polynômes de degré n. De plus le coefficient de X^n dans P_n est

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} (-1)^{n-p}(-1)^p = (-1)^n \sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p}$$

donc non nul car $\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p}$ est une somme de termes tous strictement positifs et comportant au moins un terme.

Ainsi P_n est de degré exactement n.

On a ainsi prouvé l'existence d'une suite (P_n) satisfaisant les conditions imposées. Pour l'unicité, soit (Q_n) une suite vérifiant les mêmes propriétés.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad (P_n - Q_n)(\sin^2(\theta)) = \cos(2n\theta) - \cos(2n\theta) = 0$$

Or la fonction $\sin^2$ induit une surjection de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ car elle est à valeurs dans cet intervalle et elle est continue, donc prend toutes les valeurs entre $\sin^2(0) = 0$ et $\sin^2(\pi/2) = 1$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires.

Donc $P_n - Q_n$ a une infinité de racines, c'est ainsi le polynôme nul.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sin^2$ induit une surjection de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$, on a :

$$M_n = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |P_n(\sin^2(\theta)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |\cos(2n\theta)| = 1$$

car lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$, $\cos(2n\theta)$ parcourt $[-1,1]$ si $n > 0$ et $\{1\}$ si $n = 0$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
(P_{n+1} + P_{n-1})(\sin^2\theta) &= \cos((2n+2)\theta) + \cos((2n-2)\theta) \\
&= 2\cos\frac{(2n+2+2n-2)\theta}{2} \cos\frac{(2n+2-(2n-2))\theta}{2} \\
&= 2P_n(\sin^2\theta)\cos(2\theta) \\
&= 2(1-2\sin^2\theta)P_n(\sin^2\theta)
\end{aligned}$$

Ainsi le polynôme $P_{n+1} + P_{n-1}) - 2(1-2X)P_n$ a une infinité de racines donc est le polynôme nul.

Autrement dit, $P_{n+1} + P_{n-1} = 2(1-2X)P_n$.

d) Posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P_n(-1)$, la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence linéaire à coefficients constants :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} + a_{n-1} = 6a_n$$

L'équation caractéristique associée est $\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$ dont le discriminant est 32 et les racines

$$\frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

notée λ_+ et λ_-.

Il existe donc des constantes réelles c_+ et c_- telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$a_n = c_+\lambda_+^n + c_-\lambda_-^n$$

Or $P_0 = 1$ et pour tout réel θ on a : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$ donc $P_1 = 1 - 2X$ et ainsi

$$c_+ + c_- = a_0 = 1 \text{ et } c_+\lambda_+ + c_-\lambda_- = a_1 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- & -1 \\ -\lambda_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 - 2\sqrt{2} - 3 \\ -3 - 2\sqrt{2} + 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(-1) = \frac{(3 + 2\sqrt{2}\,)^n + (3 - 2\sqrt{2}\,)^n}{2}.$$

NB : comme le résultat était donné, on pouvait aussi l'établir par récurrence. On pouvait également utiliser l'expression de P_n établie en **12.a**.

e) Comme $3 - 2\sqrt{2} \geqslant 0$ car $9 \geqslant 8$, on a $Pn(-1) \geqslant \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{2} > 0$ donc

$$|S - T_n| \leqslant \frac{2S}{(3 + 2\sqrt{2}\,)^n}.$$

Comme $3 + 2\sqrt{2} > 3$, cette suite majorante est négligeable quand n tend vers l'infini devant les suites majorantes des questions **6.c**, **10** et **11**.

Partie IV - Comparaison des méthodes sur un exemple

13) a) Soit $t \in [0, 1]$.

Par inégalité des accroissements finis, $|h(t) - h(1)| \leqslant K|t - 1] = K(1 - t)$.

b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Remarquant que $\frac{1}{m+1} = \int_0^1 t^m dt$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 t^m h(t)\mathrm{d}\,t - \frac{h(1)}{m+1}\right| &= \left|\int_0^1 t^m (h(t)-h(1))\mathrm{d}\,t\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \Big|t^m (h(t)-h(1))\Big| dt \\
&= \int_0^1 t^m |h(t)-h(1)| dt \\
&\leqslant \int_0^1 K(1-t)t^m dt \\
&= K\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) = \boxed{\frac{K}{(m+1)(m+2)}}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^1 t^m h(t)\mathrm{d}\,t - \frac{h(1)}{m+1} = O_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

et comme $\frac{1}{m+1} \sim \frac{1}{m}$,

$$\int_0^1 t^m h(t)\mathrm{d}\,t = \frac{h(1)}{m} + o(\frac{1}{m}) + O(1/m^2) = \frac{h(1)}{m} + o(\frac{1}{m})$$

Si $h(1) \neq 0$,

$$\int_0^1 t^m h(t)\mathrm{d}\,t \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{h(1)}{m}.$$

14) Par les questions 4.c. et 4.d. on a immédiatement $S - S_n = (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}\,t$.

En appliquant le résultat de la question précédente avec $h : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et vérifie bien $h(1) \neq 0$, on obtient

$$S - S_n \sim (-1)^{n+1}\frac{1/2}{n+1} \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

15) À l'aide de la question **6.b**,

$$S - \mathcal{E}_n = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^{n+1} \frac{dt}{1+t}$$

puis en effectuant le changement de variable $v = 1-t; t = 1-v; dt = -dv$ on obtient

$$S - \mathcal{E}_n = \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 \frac{v^{n+1}}{2-v}\mathrm{d}\,v$$

Appliquant enfin la question 13. avec $h : v \mapsto \frac{1}{2-v}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et non nulle en -1, il vient

$$S - \mathcal{E}_n \sim \frac{1}{2^{n+1}.n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

16) Par 9.b. on a

$$S - T_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(t)}{1+t} dt$$

Effectuant le changement de variable $t = \sin^2\theta,\ dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta = \sin(2\theta)d\theta$ ($\theta \in [0, \pi/2]$) il vient

$$\begin{aligned} S - T_n &= \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^{\pi/2} \frac{P_n(\sin^2\theta)}{1+\sin^2\theta} \sin(2\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n\theta)}{1+\frac{1-\cos(2\theta)}{2}} \sin(2\theta)d\theta \\ &= \frac{2}{P_n(-1)} \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{3-\cos x} \sin(x)dx/2 \\ &= \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^{\pi} \cos(nx)f(x)dx \end{aligned}$$

avec $f : x \mapsto \frac{\sin x}{3-\cos x}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et indépendante de n)
Intégrant trois fois par parties il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(nx)f(x)dx &= [\frac{\sin(nx)}{n} f(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} f'(x)dx \\ &= 0 + \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} f'(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} f''(x)dx \\ &= 0 + \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} f'(x)\right]_0^{\pi} - 0 + \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3} f'''(x)dx \end{aligned}$$

Or

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3} f'''(x)dx\right| \leqslant \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(nx)}{n^3} f'''(x)\right| dx \leqslant \frac{\pi}{n^3} \sup_{[0,\pi]} |f'''| = O(1/n^3)$$

(f''' est continue donc bornée sur le segment $[0, \pi]$)
De plus $f' : x \mapsto \frac{\cos x(3-\cos x)-\sin^2 x}{(3-\cos x)^2}$ donc $f'(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(\pi) = -\frac{1}{4}$.
Ainsi

$$\int_0^{\pi} \cos(nx)f(x)dx = -\frac{(-1)^n}{4n^2} - \frac{1}{2n^2} + O(1/n^3) \sim -\frac{(-1)^n}{4n^2} - \frac{1}{2n^2}$$

car cette quantité est supérieure en valeur absolue à $\frac{1}{4n^2}$ donc prépondérante sur $1/n^3$.
Enfin $P_n(-1) \sim \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{2}$, d'où

$$S - T_n \sim -\frac{\frac{(-1)^n}{2n^2} + \frac{1}{n^2}}{(3+2\sqrt{2})^n}$$

Partie V - Suites complètement monotones

17) En utilisant la question 3) on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^p(\Delta^p)_n = r^n(1-r)^p > 0$$

La suite b est complètement monotone.

18) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles. On considère la suite u de terme général $u_n = f(n)$. On veut montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout entier naturel n, il existe un réel $x_{n,p}$ appartenant à $]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x_{n,p}).$$

a) Soit $p = 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $(\Delta u)_n = f(n+1) - f(n)$. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$, on peut utiliser le théorème des accroissements finis pour obtenir qu'il existe $x_{n,1} \in]n, n+1[$ tel que

$$(\Delta u)_n = f(n+1) - f(n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(x_{n,1})$$

b) Pour tout $p \geqslant 0$ on note $H(p)$ le prédicat :

$$H(p) : \text{« Pour toute fonction } f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+),\ \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_{n,p} \in]n, n+p[,\ (\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x_{n,p}) \text{ »}$$

On procède par récurrence. Pour $p = 1$, on vient de démontrer $H(1)$.
Soit $p \geqslant 1$, on suppose que $H(p)$ est vraie. On considère $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ et on pose g définie par $g : x \mapsto f(x+1) - f(x)$. La fonction g est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, il existe $x_{n,p} \in]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p v)_n = g^{(p)}(x_{n,p})$$

Or, par dérivation, $g^{(p)} : x \mapsto f^{(p)}(x+1) - f^{(p)}(x)$ donc,

$$(\Delta^{p+1} u)_n = f^{(p)}(x_{n,p} + 1) - f^{(p)}(x_{n,p})$$

En utilisant encore le théorème des accroissements finis pour la fonction $f^{(p)}$, il existe $x_{n,p+1} \in]x_{n,p}, x_{n,p} + 1[\subset]n, n+p+1[$ tel que

$$(\Delta^{p+1} u)_n = f^{(p)}(x_{n,p} + 1) - f^{(p)}(x_{n,p}) = f^{(p+1)}(x_{n,p+1})$$

La propriété est démontrée pour tout $p \geqslant 1$.

19) On considère la suite a de terme général $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.
On applique ce qui précède à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par une récurrence immédiate on obtient que pour tout $p \geqslant 0$,

$$f^{(p)} : x \mapsto \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$$

De ce fait, en utilisant la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_{n,p} \in]n, n+p[$ tel que

$$(-1)^p (\Delta^p a)_n = (-1)^p f^{(p)}(x_{n,p}) = \frac{p!}{(1 + x_{n,p})^{p+1}} > 0$$

La suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est bien strictement monotone.