

Notations

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. On considère l'application Δ qui à toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E associe la suite Δu de terme général

$$(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note Δ^p le p -ième itéré de Δ , défini par $\Delta^p = \Delta \circ \Delta^{p-1} = \Delta^{p-1} \circ \Delta$, et l'on convient que Δ^0 est l'identité de E .

Partie I - L'opérateur Δ

- 1) a) Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
b) Déterminer le noyau de Δ .
- 2) Démontrer que, pour toute suite $u \in E$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}.$$

On pourra raisonner par récurrence sur p et utiliser la formule de Pascal.

- 3) Soit $r \in]0, 1[$. On considère la suite b de terme général $b_n = r^n$. Calculer $(\Delta^p b)_n$ pour tous entiers naturels n et p .

Partie II - Suites de moments et transformation d'Euler

Dans toute cette partie, ω désigne une fonction continue et positive sur $[0, 1]$, non identiquement nulle. On considère la suite u de terme général

$$u_n = \int_0^1 t^n \omega(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 4) a) Justifier que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ converge.

On note désormais $S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

- c) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} dt - S_n = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1} \omega(t)}{1+t} dt$$

- d) En déduire que

$$S = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} dt$$

- 5) Montrer que, pour tous entiers naturels n et p ,

$$(\Delta^p u)_n = \int_0^1 t^n (t-1)^p \omega(t) dt.$$

6) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{E}_N = \sum_{p=0}^N \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$.

a) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} \sum_{p=0}^N \left(\frac{1-t}{2} \right)^p = \frac{1}{1+t} \left(1 - \left(\frac{1-t}{2} \right)^{N+1} \right).$$

b) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{E}_N = S - \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2} \right)^{N+1} \frac{\omega(t)}{1+t} dt.$$

c) Montrer que $|S - \mathcal{E}_N| \leq \frac{S}{2^{N+1}}$, puis en déduire que la série $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.$$

Cette dernière série est appelée *transformée d'Euler* de la série $\sum (-1)^k u_k$.

7) Dans cette question, on prend $\omega(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Expliciter u_n et S , puis démontrer que

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1) 2^{p+1}}.$$

En utilisant les expressions des questions 4.c et 6.c on peut montrer, mais on ne demande pas de le faire, que la suite $(\mathcal{E}_N)_{N \geq 0}$ converge vers $\ln(2)$ beaucoup plus vite que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$.

Partie III - Une amélioration de la méthode

Dans toute cette partie, la fonction ω , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et le réel S sont ceux définis au début de la deuxième partie. On se donne de plus une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg P_n = n \quad \text{et} \quad P_n(-1) \neq 0,$$

et l'on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(-1) - P_n(t)}{1+t} \omega(t) dt.$$

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose (à priori dans $\mathbb{R}(X)$), $R_n(X) = \frac{P_n(-1) - P_n(X)}{1+X}$.

Montrer que R_n est un polynôme et qu'il est de degré au plus $n-1$.

9) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S - T_n = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{P_n(-1)(1+t)} \omega(t) dt.$$

- b) En déduire que $|S - T_n| \leq \frac{S M_n}{|P_n(-1)|}$, où $M_n = \sup_{t \in [0,1]} |P_n(t)|$.
- 10) Dans cette question, on choisit $P_n(X) = (1 - X)^n$. Déterminer M_n et $P_n(-1)$, puis donner une majoration explicite de $|S - T_n|$ en fonction de S et de n . Comparer avec la majoration obtenue à la question **6.c**.
- 11) Dans cette question, on choisit $P_n(X) = (1 - 2X)^n$. Donner de même une majoration explicite de $|S - T_n|$.
- 12) On cherche maintenant à construire de bons polynômes P_n .

- a) Démontrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\sin^2 \theta) = \cos(2n\theta).$$

Pour l'existence de P_n , on pourra exprimer $\cos(2n\theta)$ à l'aide de nombres complexes et utiliser la formule du binôme de Newton.

- b) Montrer que $M_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} + P_{n-1} = 2(1 - 2X)P_n$.
- d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(-1) = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2}.$$

En particulier $P_n(-1) \neq 0$, ce qui légitime la définition de T_n .

- e) En déduire la majoration

$$|S - T_n| \leq \frac{2S}{(3 + 2\sqrt{2})^n}.$$

Commenter en comparant aux majorations des questions **6.c**, **10** et **11**.

Partie IV - Comparaison des méthodes sur un exemple

Dans cette partie, on prend $\omega(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, de sorte que $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $S = \ln 2$. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}, \quad \mathcal{E}_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)2^{k+1}},$$

et T_n désigne la quantité définie dans la troisième partie, associée aux polynômes de la question **12**.

- 13) Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, et $K = \sup_{t \in [0,1]} |h'(t)|$.

- a) Montrer que $|h(t) - h(1)| \leq K(1 - t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.
- b) En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 t^m h(t) dt - \frac{h(1)}{m+1} \right| \leq \frac{K}{(m+1)(m+2)},$$

puis que, si $h(1) \neq 0$,

$$\int_0^1 t^m h(t) dt \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{h(1)}{m}.$$

- 14) Montrer que $S - S_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$, puis donner un équivalent de $S - S_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 15) À l'aide de la question **6.b**, montrer que $S - \mathcal{E}_n = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 \frac{v^{n+1}}{2-v} dv$, puis donner un équivalent de $S - \mathcal{E}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 16) Finalement, donner un équivalent de $S - T_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
*On pourra effectuer le changement de variable $t = \sin^2 \theta$ dans l'intégrale obtenue à l'aide de la question **9.a** puis effectuer des intégrations par parties.*

Partie V - Suites complement monotones

On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *complètement monotone* si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^p (\Delta^p u)_n > 0.$$

- 17) Soit $r \in]0, 1[$. Montrer que la suite b de terme général $b_n = r^n$ est complètement monotone.
- 18) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles. On considère la suite u de terme général $u_n = f(n)$. On veut montrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier naturel n , il existe un réel $x_{n,p}$ appartenant à $]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x_{n,p}).$$

- a) Démontrer le résultat pour $p = 1$.
- b) En raisonnant par récurrence sur p et en introduisant la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = f(x+1) - f(x)$ ainsi que la suite v de terme général $v_n = g(n)$, démontrer la propriété pour tout $p \geq 1$.
- 19) On considère la suite a de terme général $a_n = \frac{1}{n+1}$.
Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est complètement monotone.