

Interrogation 1 – Corrigé

Séries numériques

MP2 – 2026/2027

A. Nature de séries numériques

12 pts

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{2n+3}{n^2+n+1}$$

La série **DIVERGE**. Le terme général est positif et

$$\frac{2n+3}{n^2+n+1} \sim \frac{2}{n},$$

terme général d'une série divergente : comparaison pour les séries à termes positifs.

$$2. \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$$

La série **CONVERGE**, par la règle de d'Alembert : le terme général est strictement positif et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(3n+3)^{n+1}} \cdot \frac{(3n)^n}{n!} = \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3e} < 1.$$

$$3. \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

La série **CONVERGE**. En effet, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \exp \left(-n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \exp \left(-n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) = \exp \left(-n + \frac{1}{2} + o(1) \right),$$

donc $u_n \sim \sqrt{e} e^{-n}$. La série $\sum e^{-n}$ converge puisque c'est une série géométrique de raison $e^{-1} \in [0, 1[$. On peut conclure par comparaison pour les séries à termes positifs.

$$4. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

La série **DIVERGE**. On fait un développement asymptotique :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n} \right) \right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{CV (TSA)}} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{DV}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)}_{\text{CV}}.$$

La somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge.

$$5. \sum_{n \geq 1} \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \right)$$

La série **CONVERGE**. Comme $e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}$ quand $x \rightarrow 0$,

$$e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2} > 0,$$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$).

6. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$

La série **DIVERGE**. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est positive, continue et décroissante sur $[2, +\infty[$, donc par comparaison série-intégrale

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

B. Questions à réponses multiples

8 pts

7. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- **FAUX** — « $u_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum u_n$ converge ». Contre-exemple : la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.
- **VRAI** — « $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \rightarrow 0$ ».
- **FAUX** — « $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge ». Ce résultat est vrai pour les séries à termes positifs mais faux dans le cas général.

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

- **VRAI** — « $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ convergence absolue ». Il suffit de voir que $\sum \frac{1}{n^2}$ est ACV

C. Calcul d'une somme

6 pts

9–10. Déterminer $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux tels que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{a}{b}$.

La série converge car $\frac{1}{n^2 - 1} \sim \frac{1}{n^2}$ (termes positifs).

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Le télescopage donne, pour $N \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2 - 1} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{N+1} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

D'où $\boxed{a = 3 \quad \text{et} \quad b = 4.}$

D. Question rédigée

5 pts

11. Pour $n \geq 1$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que $R_n \sim \frac{1}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

La série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann), donc R_n est bien défini comme reste d'ordre n .

Équivalent de R_n . La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$, donc pour tout $k \geq 2$

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}.$$

En sommant pour k de $n+1$ à $+\infty$ (les trois séries convergent) :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, l'encadrement donne

$$\boxed{R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$