

Interrogation 2 – Corrigé

Algèbre linéaire

MP2 – 2026/2027

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

A. Éléments propres et diagonalisabilité de A

14 pts

1–2. Valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2$ de A .

En développant le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$:

$$\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

3–6. Vecteurs $u_1 = (1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (1, y_2, z_2)$ engendrant les sous-espaces propres.

Sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$. On résout $(A - I_3)X = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 3y - 4z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$E_{\lambda_1}(a) = \text{Vect}(u_1), \quad u_1 = (1, -1, 0), \quad \text{d'où } y_1 = -1, \quad z_1 = 0.$$

Sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$. On voit que

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - 3I_3$ est de rang au plus 2 car $3 \in \text{Sp}(A)$ et de rang au moins 2 car $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. On en déduit que $E_3(a)$ est un espace vectoriel de dimension $3 - 2 = 1$. De plus, en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de $A - 3I_3$ on voit que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.

Ainsi

$$E_{\lambda_2}(a) = \text{Vect}(u_2), \quad u_2 = (1, 1, 1), \quad \text{d'où } y_2 = 1, \quad z_2 = 1.$$

En particulier $\dim E_{\lambda_1}(a) = \dim E_{\lambda_2}(a) = 1$.

7. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

NON. La somme des dimensions des deux espaces propres fait $2 < 3$.

B. Réduction de A

4 pts

9–10. Vecteur $u_3 = (1, y_3, z_3)$ tel que $(a - \text{id})(u_3) = (1, -1, 0)$.

Le système $(A - I_3)U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ s'écrit

$$\begin{cases} 1 + y_3 &= 1 \\ 3 + 3y_3 - 4z_3 &= -1 \\ 2 + 2y_3 - 2z_3 &= 0 \end{cases}$$

D'où $y_3 = 0$ et $z_3 = 1$, c'est-à-dire $u_3 = (1, 0, 1)$.

C. Question rédigée

5 pts

11. Justifier que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de a dans cette base.

$\mathcal{B}$ est une base. La matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{vérifie} \quad \det P = 1 \neq 0,$$

donc (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: c'est une base.

Matrice de a dans $\mathcal{B}$. Par construction,

$$a(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad a(u_2) = \lambda_2 u_2, \quad a(u_3) = u_3 + u_1,$$

la dernière égalité venant de $(a - \text{id})(u_3) = u_1$. En rangeant ces images en colonnes,

$$T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D. Bonus

8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- **VRAI** — « n valeurs propres distinctes $\Rightarrow M$ diagonalisable ». Les n sous-espaces propres sont en somme directe et de dimension ≥ 1 : la somme de leurs dimensions vaut n .
- **FAUX** — « diagonalisable $\Rightarrow$ inversible ». La matrice nulle est diagonale et non inversible ; 0 peut être valeur propre.
- **VRAI** — « $M^2 = M \Rightarrow$ diagonalisable ». Soit m l'endomorphisme canoniquement associé à M . On voit que $m^2 = m$ ce qui implique que m est la projection sur $\text{Ker}(m) = E_0(m)$ sur $\text{Im}(m) = E_1(m)$. En particulier, $\mathbb{R}^n = E_0(m) \oplus E_1(m)$ ce qui montre que m puis M est diagonalisable.