

Interrogation 3 – Corrigé

Intégration

MP2 – 2026/2027

A. Nature d'intégrales

12 pts

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + 1}$

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{e^t + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$

- Étude au voisinage de $+\infty$: on voit que : $\frac{1}{e^t + 1} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$
La fonction $t \mapsto e^{-t}$ appartient à $L^1([0, +\infty[)$ donc f aussi.

L'intégrale **CONVERGE**.

2. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t+1}}$ est continue sur $[1, +\infty[$

- Étude au voisinage de $+\infty$: on voit que : $\frac{1}{t\sqrt{t+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ appartient à $L^1([1, +\infty[)$ donc f aussi.

L'intégrale **CONVERGE**.

3. $\int_0^1 \ln t \, dt$

La fonction $f : t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0, 1]$

- Étude au voisinage de 0 : on voit que : $\ln t = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$
La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ appartient à $L^1(]0, 1])$ donc f aussi.

L'intégrale **CONVERGE**.

On pouvait aussi dire qu'une primitive est $t \mapsto t \ln t - t$, qui admet la limite finie 0 en 0^+ ; donc

$$\int_{\varepsilon}^1 \ln t \, dt = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -1.$$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} \, dt$

La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Étude au voisinage de 0 : on voit que : $\frac{\sin t}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$
On sait que $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ donc $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ non plus. Comme c'est une fonction positive au voisinage de 0, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2} \, dt$ diverge.

- Étude au voisinage de $+\infty$: on sait que $\left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ appartient à $L^1([1, +\infty[)$ donc f aussi.

L'intégrale **DIVERGE**,

5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$

- Étude au voisinage de $+\infty$: on voit que : $\frac{\ln t}{t^2} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right)$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ appartient à $L^1([1, +\infty[)$ donc f aussi.

L'intégrale **CONVERGE**.

6. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t}(1-t)}$

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{t}(1-t)}$ est continue sur $]0, 1[$

- Étude au voisinage de 0 : on voit que : $\frac{1}{\sqrt[3]{t}(1-t)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1/3}}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1/3}}$ appartient à $L^1(]0, 1[)$ donc f aussi.

- Étude au voisinage de 1 : on se ramène à une étude en 0^+ en posant $u = 1 - t \Leftrightarrow t = 1 - u$; $dt = -du$.

Par changement de variables affine, $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t}(1-t)}$ est de la même nature que $\int_0^{1/2} \frac{du}{u\sqrt[3]{1-u}}$

on voit que : $\frac{1}{u\sqrt[3]{1-u}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u}$

On sait que $u \mapsto \frac{1}{u}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1[$ donc $t \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{t}(1-t)}$ non plus. Comme c'est une

fonction positive au voisinage de 0, l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{du}{u\sqrt[3]{1-u}}$ diverge et donc $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t}(1-t)}$ aussi.

L'intégrale **DIVERGE**,

B. Questions à réponses multiples

8 pts

7. Soit f continue sur $[0, +\infty[$.

- **FAUX** — « $\int_0^{+\infty} f$ converge $\Rightarrow f(t) \rightarrow 0$ ». Contre-exemple : la fonction affine par morceaux valant 0 partout sauf sur des « pics » de hauteur 1 et de largeur $\frac{1}{2^n}$ centrés en n ; son intégrale converge alors que $f(n) = 1$ pour tout n .
- **FAUX** — « $f \geq 0$ et $\int_0^{+\infty} f$ converge $\Rightarrow f$ bornée ». Même idée avec des pics de hauteur n et de largeur $\frac{1}{n^3}$: l'aire totale converge et f n'est pas bornée.
- **VRAI** — « f intégrable $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f$ converge ». L'intégrabilité, c'est la convergence de $\int |f|$, qui entraîne celle de $\int f$ (convergence absolue).
- **VRAI** — « $|f| \leq g$ avec g intégrable $\Rightarrow f$ intégrable ». C'est le théorème de comparaison pour les fonctions positives appliqué à $|f| \leq g$.

C. Calcul par intégration par parties

6 pts

8–9. Calcul de $I = \int_0^1 t \ln t \, dt$.

Convergence. La fonction $t \mapsto t \ln t$ est continue sur $]0, 1]$ et tend vers 0 en 0^+ : elle se prolonge par continuité en 0, l'intégrale est donc *faussement impropre* et converge.

Calcul. Par intégration par parties

$$\int_0^1 t \ln t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} \, dt$$

car le crochet converge puisque $t^2 \ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$. On en déduit que

$$\int_0^1 t \ln t \, dt = 0 + \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

D'où $a = -1$ et $b = 4$.

D. Question rédigée

5 pts

11. Montrer que $J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ converge, puis la calculer par le changement de variable $t = \tan u$.

Convergence. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. On voit que

$$\frac{1}{(1+t^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4}$ appartient à $L^1([1, +\infty[)$ donc f aussi. On en déduit que J converge.

Calcul. L'application $\varphi : u \mapsto \tan u$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$, avec $dt = (1 + \tan^2 u) du$. Comme $1 + t^2 = 1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$,

$$\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \cos^4 u \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \cos^2 u \, du.$$

Le changement de variable donne donc

$$J = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2u)}{2} \, du = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$