

Exercice I

On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

On note H l'ensemble des fonctions f de E telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Soit $f \in H$ on appelle $T(f)$ la fonction définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$T(f) : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}f(3x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{2}(1 + f(3x - 2)) & \text{si } x \in]\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

1) Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ définit bien une application de H dans H .

2) Montrer que pour f, g dans H , $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$.

On construit une suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 0} \in H^{\mathbb{N}}$ en posant $g_0 : x \mapsto x$ et, pour tout entier naturel n , $g_{n+1} = T(g_n)$.

3) Tracer les fonctions g_0, g_1 et g_2 .

4) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 0}$ converge normalement. On note par la suite g la limite de cette suite.

On pourra pour $x \in [0, 1]$, on pourra faire intervenir la série $\sum_{k \geq 0} g_{k+1}(x) - g_k(x)$.

5) Montrer que la fonction g appartient à H .

On considère $h_0 : x \mapsto \frac{1}{3}x$ et $h_1 : x \mapsto 1 + \frac{1}{3}(x - 1)$. Ce sont les homothéties de la droite de rapport $\frac{1}{3}$ et de centres 0 et 1.

On construit alors les ensembles $K_0, K_1, \dots$ en posant $K_0 = [0, 1]$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$K_{n+1} = h_0(K_n) \cup h_1(K_n)$$

On note aussi $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Pour tout entier n , on note alors U_n le complémentaire de K_n dans $[0, 1]$ et $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ le complémentaire de K dans $[0, 1]$.

6) Décrire K_1 et K_2 . Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est réunion d'un nombre fini de segments 2 à 2 disjoints dont on donnera le nombre et les longueurs.

7) Montrer que pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap K_n = \emptyset$.

8) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 1] \quad g_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \mathbb{1}_{K_n}(t) dt$$

où $\mathbb{1}_{K_n} : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in K_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble K_n .

9) En déduire que la restriction de g à U est dérivable et que de plus, pour tout $x \in U$, $g'(x) = 0$.

Exercice II

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par

$$f_n(t) = \frac{1}{n} t^n \sin(nt)$$

1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$.

2) Soit $a \in]0, 1[$.

a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

b) En déduire que la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et montrer que :

$$\forall t \in] -1, 1[, \quad f'(t) = \frac{\sin t + t \cos t - t^2}{1 - 2t \cos t + t^2}.$$

c) Montrer que $f(t) = \arctan\left(\frac{t \sin t}{1 - t \cos t}\right)$ pour $t \in] -1, 1[$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1, 1]$, $A_n(t) = \sum_{k=1}^n t^k \sin(kt)$.

a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1, 1]$ on ait $|A_n(t)| \leq M$.

On cherche juste l'existence de M , on ne cherchera pas à calculer une valeur explicite.

b) Montrer en écrivant $t^k \sin(kt) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$ que

$$\sum_{k=1}^n \frac{t^k \sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}$$

c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$ et que $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1, 1]$. Montrer que f est continue sur cet intervalle.

d) En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$.