

Partie I : Calcul de l'intégrale de Gauss

1) La fonction φ est continue sur $] -\infty, \infty[$.

- Au voisinage de $+\infty$, $x^2 e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que $\varphi(x) = \underset{+\infty}{o} \left(\frac{1}{x^2} \right)$. Comme $(x \mapsto \frac{1}{x^2}) \in L^1([1, +\infty[)$, $\varphi \in L^1([1, +\infty[)$.
- Au voisinage de $-\infty$, $x^2 e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$. On en déduit que $\varphi(x) = \underset{-\infty}{o} \left(\frac{1}{x^2} \right)$. Comme $(x \mapsto \frac{1}{x^2}) \in L^1(]-\infty, -1])$, $\varphi \in L^1(]-\infty, -1])$.

Finalement, φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $n \geq 1$. La fonction f_n est nulle sur $] -\infty, -\sqrt{n}[\cup] \sqrt{n}, +\infty[$ donc I_n est bien définie et

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n dx$$

On applique le théorème de convergence dominée.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, $x \in]-\sqrt{n}, \sqrt{n}[$ donc $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n = \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \right)$.
On sait que

$$n \ln \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{x^2}{n} \right) = -x^2$$

Cela montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers φ .

- Domination. Soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Justifions que $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$.

- Si $|x| \geq \sqrt{n}$, $|f_n(x)| = 0 \leq \varphi(x)$.
- Si $|x| < \sqrt{n}$, comme pour $u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$,

$$|f_n(x)| \leq \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \right) \leq \exp(-x^2) = \varphi(x)$$

Par le théorème de convergence dominée, $(I_n) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

3) Soit $n \geq 1$, on pose $x = \sqrt{n} \sin t$. La fonction $t \mapsto \sqrt{n} \sin t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $] -\sqrt{n}, \sqrt{n}[$. De plus $dx = \sqrt{n} \cos t dt$. On obtient alors

$$I_n = \sqrt{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \frac{n \sin^2 t}{n} \right)^n \cos t dt = \sqrt{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^n \cos t dt = \sqrt{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt$$

4) Pour $p \geq 2$, par intégration par parties, en écrivant $\cos^p t = \cos t \times \cos^{p-1} t$,

$$J_p = [\sin t \times \cos^{p-1} t]_0^{\pi/2} + (p-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{p-2} t dt = (p-1) (J_{p-1} - J_p)$$

Finalement $pJ_p = (p-1)J_{p-2}$ donc $J_p = \frac{p-1}{p} J_{p-2}$.

- 5) Soit $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \cos^{2n+1} t$ est paire donc, en utilisant le changement de variable, $u = -t$,

$$\int_{-\pi/2}^0 \cos^{2n+1} t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u \, du$$

On en déduit que $I_n = 2\sqrt{n}J_{2n+1}$. Maintenant,

$$J_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} J_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} J_{2n-3} = \cdots = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} J_1$$

Comme de plus

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$$

On obtient bien que

$$I_n = 2\sqrt{n} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}.$$

- 6) On a donc

$$I_n = \frac{2\sqrt{n}}{2n+1} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{2\sqrt{n} \times 4^n \times n^{2n} \times 2\pi n \times e^{-2n}}{(2n+1) \times (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}} \sim \sqrt{\pi}$$

En utilisant le résultat de la question 2) on a bien que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \sqrt{\pi}$$

Partie II : Méthode de Laplace

- 7) Comme f est maximale en 0 et définie au voisinage de 0 et dérivable en 0, on a $f'(0) = 0$.
Supposons $f''(0) > 0$. Comme $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{f''(0)}{2} x^2 \quad \text{car } f''(0) \neq 0$$

Ainsi au voisinage de zéro $f(x)$ est du même signe que $\frac{f''(0)}{2}x^2$ donc strictement positif lorsque $x \neq 0$. De qui contredit la maximalité de f en zéro.

Donc $f''(0) \leq 0$, et comme $f''(0) \neq 0$ on a $f''(0) < 0$.

- 8) Soit $t > 0$.

Par le changement de variable $u = x\sqrt{t}$, $x = \frac{u}{\sqrt{t}}$, $dx = \frac{du}{\sqrt{t}}$:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_a^b e^{tf(x)} dx \\ &= \int_{a\sqrt{t}}^{b\sqrt{t}} e^{t f(u/\sqrt{t})} \frac{du}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

- 9) Soit $u \in \mathbb{R}$.

Comme $\frac{u}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, on a d'après le raisonnement de la question 7) :

$$t f(u/\sqrt{t}) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t \frac{-\lambda}{2} (u/\sqrt{t})^2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\frac{\lambda u^2}{2}$$

10) En utilisant toujours l'équivalent donné en 7) on a :

$$\frac{f(x)}{x^2/2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\lambda < 0$$

donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$

$$\frac{f(x)}{x^2/2} \leq \frac{-\lambda}{2}$$

c'est-à-dire

$$f(x) \leq -\frac{\lambda}{4}x^2$$

et l'inégalité reste vraie pour $x = 0$ car $f(0) = 0 \leq 0$.

La fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x^2}$ est continue sur le segment $[a, -\delta]$ donc est majorée et atteint sa borne supérieure notée M_1 . Comme g est à valeurs strictement négatives et que M_1 est une valeur prise par g on a $M_1 < 0$.

Idem sur $[\delta, b]$ avec M_2 .

Posons $\eta = \min\left(-M_1, -M_2, \frac{\lambda}{4}\right)$. Alors $\eta > 0$ et $M_1 \leq -\eta$, $M_2 \leq -\eta$ et $\frac{-\lambda}{4} \leq -\eta$.

Ainsi pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq -\eta x^2$.

11) Par la question 8) on a

$$\forall t > 0 \quad \sqrt{t}I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_t(u) du$$

$$\text{où } h_t : u \mapsto \begin{cases} e^{tf(u/\sqrt{t})} & \text{si } a\sqrt{t} \leq u \leq b\sqrt{t} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par la question 9) et par continuité de l'exponentielle, on a :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad h_t(u) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} h(u)$$

où $h : u \mapsto e^{-\lambda u^2/2}$.

Par la question 10) et croissance de l'exponentielle on a :

$$\forall t > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad |h_t(u)| = h_t(u) \leq e^{-\eta u^2} = \varphi(u)$$

Enfin les fonctions h_t , la fonction h et la fonction φ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, et la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car négligeable devant $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ aux infinis, qui est intégrable au voisinage des infinis.

On en déduit par le théorème de convergence dominée que :

$$\sqrt{t}I(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda u^2/2} du.$$

12) Par le changement de variable $y = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}u$, $du = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}dy$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\lambda u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} dy = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \sqrt{\pi} \neq 0$$

d'après le calcul de l'intégrale de Gauss réalisé dans la première partie.

On en déduit que

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx = I(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(0)|}}$$

13) On suppose maintenant que f qui est toujours supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ atteint son maximum en $x_0 \in]a, b[$ et nulle part ailleurs. On ne suppose plus que $f(x_0) = 0$. On suppose encore que $f''(x_0) \neq 0$.

On pose $g : h \in [a - x_0, b - x_0] \mapsto f(x_0 + h) - f(x_0)$. Alors g vérifie les hypothèses faites en début de partie avec $g''(0) = f''(x_0)$, donc

$$\int_{a-x_0}^{b-x_0} e^{tg(x)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}$$

Ainsi

$$I(t) = \int_a^b e^{t(g(x-x_0)+f(x_0))} dx = e^{tf(x_0)} \int_{a-x_0}^{b-x_0} e^{tg(h)} dh \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}} e^{tf(x_0)}}$$