

Partie I : Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette partie on veut montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } |x| \leq \sqrt{n}, \\ 0 & \text{si } |x| > \sqrt{n}. \end{cases}$$

On note alors

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$$

1) Montrer que $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, I_n est bien définie puis montrer que $(I_n) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

3) Soit $n \geq 1$, montrer que

$$I_n = \sqrt{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t \, dt$$

On pourra effectuer le changement de variables $x = \sqrt{n} \sin t$.

4) Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_p = \int_0^{\pi/2} \cos^p t \, dt$$

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour $p \geq 2$,

$$J_p = \frac{p-1}{p} J_{p-2}.$$

5) Montrer alors que

$$I_n = 2\sqrt{n} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}.$$

6) Conclure en utilisant la formule de Stirling.

Partie II : Méthode de Laplace

Soit $a < b$ deux réels avec $a < 0 < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.

On suppose que f atteint son maximum en 0 et nulle part ailleurs. On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que $f''(0) \neq 0$.

7) Justifier que $f'(0) = 0$ et que $f''(0) < 0$.

Pour simplifier les notations, on pose $\lambda = -f''(0) > 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note

$$I(t) = \int_a^b e^{tf(x)} dx.$$

8) Soit $t > 0$. Montrer que

$$\sqrt{t} I(t) = \int_{a\sqrt{t}}^{b\sqrt{t}} \exp\left(t(f(u/\sqrt{t}))\right) du.$$

On pourra poser $u = x\sqrt{t}$.

9) Pour u fixé, montrer que

$$tf\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\frac{\lambda u^2}{2}.$$

10) Justifier qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, $f(x) \leq -\frac{\lambda}{4}x^2$.

En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq -\eta x^2$.

On pourra considérer la restriction de f à $[a, -\delta]$ puis à $[\delta, b]$.

11) En déduire que

$$\sqrt{t} I(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda u^2/2} du.$$

12) Montrer que

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(0)|}}$$

13) On suppose maintenant que f qui est toujours supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ atteint son maximum en $x_0 \in]a, b[$ et nulle part ailleurs. On ne suppose plus que $f(x_0) = 0$. On suppose encore que $f''(x_0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $I(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.