

Exercice

- 1) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et concave sur $] -1, +\infty[$ car sa dérivée seconde est négative puisque pour tout $x > -1$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$.

On en déduit que la courbe de f est « sous » sa tangente en $x = 0$. Cela implique que pour $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

- 2) Soit $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ en utilisant la question précédente.

De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

Toujours avec la première question, on obtient que $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

Pour finir,

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cela montre bien que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On sait alors qu'elles convergent vers une même limite que l'on note γ .

- 3) a) On remarque pour commencer que l'inégalité est vraie pour $t = n$.
Ensuite pour $t \in [0, n[$, $-\frac{t}{n} > -1$ donc, en utilisant la question 1,

$$n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq n \times \left(-\frac{t}{n}\right) = -t$$

En composant par la fonction $\exp$ qui est croissante on obtient que

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq e^{-t}$$

- b) Là encore, l'inégalité est vraie si $t = n$.

Pour $t \in [0, n[$, on remarque que

$$e^{t/n} \left(1 - \frac{t}{n}\right) \geq 1 - \frac{t^2}{n^2} \iff e^{t/n} \geq \frac{1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2}{1 - \frac{t}{n}} = 1 + \frac{t}{n}$$

Or, en utilisant encore la question 1, $\ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}$; il suffit alors de composer par l'exponentielle qui est croissante.

- c) Montrons par récurrence que pour tout $y \in [0, 1]$ et tout $n \geq 1$, $(1-y)^n \geq 1 - ny$.

— Pour $n = 1$, on a bien $(1-y)^1 \geq 1 - y$.

— Soit $n \geq 1$, on suppose que $(1-y)^n \geq 1 - ny$. Comme $1-y \geq 0$,

$$(1-y)^{n+1} = (1-y) \times (1-y)^n \geq (1-y) \times (1-ny) = 1 - (n+1)y + ny^2 \geq 1 - (n+1)y$$

La propriété est vérifiée pour tout $n \geq 1$.

d) Maintenant, en utilisant 3.a) on a bien l'inégalité de gauche.

En reprenant l'inégalité de 3.b) on obtient en élevant à la puissance n puis en appliquant le premier résultat de la question :

$$e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \times \frac{t^2}{n^2} = 1 - \frac{t^2}{n}$$

Il ne suffit plus que de multiplier par e^{-t} pour obtenir l'inégalité de droite.

4) La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \frac{-(-t)}{t} = 1$.

On en déduit que φ se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Par ailleurs, $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. On sait que $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ donc φ non

plus. Comme elle est positive, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ diverge.

5) Soit $x > 0$. La fonction $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$. De plus $\frac{e^{-t}}{t} = o_{+\infty}(e^{-t})$.

Comme $(t \mapsto e^{-t})$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, g aussi. Cela montre que $E_1(x)$ est bien défini.

Il est clair que $E_1(x) \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

Par ailleurs, on peut réaliser une intégration par parties

$$E_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

où le crochet converge car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{t} = 0$. On en déduit par positivité de l'intégrale :

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{e^{-x}}{x}$$

6) Notons H la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $H : x \mapsto F(x) - \ln(x) - E_1(x)$. Les fonctions F et E_1 sont de classe $\mathcal{C}^1$ par le théorème fondamental de l'analyse car φ est continue sur $[0, +\infty[$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus pour $x > 0$:

$$H'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x} = 0$$

La fonction H étant constante. On pose C sa valeur et on a bien que pour $x > 0$,

$$F(x) = \ln x + C + E_1(x),$$

Comme $E_1(x)$ tend vers 0 en tant que reste d'une intégrale convergente, $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - \ln x)$.

7) Soit $n \geq 1$. On pose $u = 1 - \frac{t}{n}$ qui est affine. On a $du = -\frac{1}{n}dt$.

$$\int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt = - \int_1^0 \frac{1 - u^n}{n(1-u)} \frac{du}{n} = \int_0^1 \frac{1 - u^n}{1-u} du$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} u^k du = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n$$

8) Pour $n \geq 1$, en utilisant ce qui précède,

$$H_n - F(n) = \int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt - \int_0^n \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \int_0^n \frac{e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt$$

Par la question 3.a) on obtient par positivité de l'intégrale que $H_n - F(n) \geq 0$.

Par ailleurs, en utilisant 3.c)

$$H_n - F(n) \leq \int_0^n \frac{te^{-t}}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^n te^{-t} dt$$

De plus

$$\int_0^n te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^n + \int_0^n e^{-t} dt = -ne^{-n} + [-e^{-t}]_0^n = -ne^{-n} - e^{-n} + 1 \leq 1$$

On obtient bien que $0 \leq H_n - F(n) \leq \frac{1}{n}$. En particulier, $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n - F(n) = 0$.

On voit alors que

$$C = F(n) - \ln(n) - E_1(n) = F(n) - H_n + H_n - \ln(n) - E_1(n)$$

On vient de voir que $F(n) - H(n) \rightarrow 0$ par encadrement. Comme de plus $E_1(n) \rightarrow 0$ par encadrement d'après la question 5) et que $(H_n - \ln(n))$ tend vers γ d'après la question 2), obtient bien que $C = \gamma$.

9) La fonction $h : t \mapsto (\ln t)e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

— Au voisinage de 0, $h(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$. De plus $\ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $\sqrt{t} \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$. Comme $(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}) \in L^1([0, 1])$, $(t \mapsto \ln(t)) \in L^1([0, 1])$ et donc $h \in L^1([0, 1])$.

— Au voisinage de $+\infty$. On voit que $t^2 h(t) = \sqrt{t}(\ln t)t^{3/2}e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ donc $h(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme $(t \mapsto \frac{1}{t^2}) \in L^1([1, +\infty[)$ alors $h \in L^1([1, +\infty[)$.

On a bien montré que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} dt$ converge.

10) Soit $x > 0$. Par intégration par parties,

$$\int_0^x (\ln t) e^{-t} dt = [(1 - e^{-x}) \ln t]_0^x - \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$$

où le crochet converge car

$$(1 - e^{-t}) \ln t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

Donc

$$\int_0^x (\ln t) e^{-t} dt = (1 - e^{-x}) \ln x - F(x).$$

11) Comme $e^{-x} \ln(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$,

$$\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - F(x) = -\gamma$$

Problème

Partie I : Un premier exemple

- 1) L'endomorphisme $s : X \mapsto SX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à S est une symétrie, donc $\text{Ker}(s - \text{id}) = \text{Ker}(S - I_n)$ et $\text{Ker}(s + \text{id}) = \text{Ker}(S + I_n)$ sont supplémentaires. Soit $\mathcal{B}'$ la concaténée de bases de chacun de ces sous-espaces. Par le théorème de la base adaptée, c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Dans cette base, la matrice de s est S' . Notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ à la base $\mathcal{B}'$, on a

$$S' = P^{-1}SP.$$

- 2) a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(\varphi) &\iff SM - MS = \lambda M \\ &\iff PS'P^{-1}M - MPS'P^{-1} = \lambda M \\ &\iff PS'P^{-1}PM'P^{-1} - PM'P^{-1}PS'P^{-1} = \lambda PM'P^{-1} \\ &\iff P(S'M' - M'S')P^{-1} = P(\lambda M')P^{-1} \\ &\iff S'M' - M'S' = \lambda M' \\ &\quad \text{(l'implication de bas en haut est immédiate, celle de haut en bas} \\ &\quad \text{s'obtient en multipliant par } P \text{ à droite et par } P^{-1} \text{ à gauche)} \\ &\iff M' \in E_\lambda(\varphi') \end{aligned}$$

Comme θ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (de réciproque $M' \mapsto PM'P^{-1}$), et comme $E_\lambda(\varphi) = \theta^{-1}(E_\lambda(\varphi'))$, on a

$$E_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \iff E_\lambda(\varphi') \neq \{0\}$$

Donc φ et φ' ont même spectre.

- b) On a ainsi pour tout réel λ :

$$M' \in E_\lambda(\varphi') \iff \begin{cases} 0 = \lambda A \\ 2B = \lambda B \\ -2C = \lambda C \\ 0 = \lambda D \end{cases}$$

On trouve ainsi que $E_\lambda(\varphi') = \{0\}$ lorsque $\lambda \notin \{-2, 0, 2\}$.

De plus,

$$E_0(\varphi') = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, (A, D) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C}) \right\} \text{ qui est isomorphe à } \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \times$$

$\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$ donc est de dimension $\dim \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) + \dim \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C}) = p^2 + (n-p)^2$;

$$E_2(\varphi') = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C}) \right\} \text{ qui est isomorphe à } \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C}) \text{ donc est de}$$

dimension $p(n-p)$;

$$E_{-2}(\varphi') = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C}) \right\} \text{ qui est isomorphe à } \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C}) \text{ donc est de}$$

dimension $(n-p)p$.

- 3) Comme θ induit des isomorphismes entre les sous-espaces propres de φ et ceux de φ' , les sous-espaces propres de φ et de φ' ont mêmes dimensions.

Ainsi

$$\dim E_0(\varphi) + \dim E_2(\varphi) + \dim E_{-2}(\varphi) = p^2 + (n-p)^2 + 2p(n-p) = (p+(n-p))^2 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}.$

- 4) a) Si $0 < p < n$, $\text{Sp}(S) - \text{Sp}(S) = \{1 - 1, 1 - (-1), -1 - 1, -1 - (-1)\} = \{-2, 0, 2\} = \text{Sp}(h_S).$

$$\text{Si } 0 = p < n, \text{Sp}(S) - \text{Sp}(S) = \{-1 - (-1)\} = \{0\} = \text{Sp}(h_S).$$

$$\text{Si } 0 < p = n, \text{Sp}(S) - \text{Sp}(S) = \{1 - 1\} = \{0\} = \text{Sp}(h_S).$$

$$\text{Enfin, si } p = n = 0, \text{Sp}(S) - \text{Sp}(S) = \emptyset = \text{Sp}(h_S).$$

- b) On a $\chi_S = \chi_{S'} = (X - 1)^p(X + 1)^q$ donc $m(1) = p$ et $m(-1) = n - p$ et on a

$$\boxed{m(1)^2 + m(-1)^2 = p^2 + (n - p)^2 = \dim \text{Ker} \varphi}.$$

Partie II : Un deuxième exemple

- 5) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(\lambda I_2 - A_0) = (\lambda - 0)(\lambda - 3) - 1 \cdot (-2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$$\det(\lambda I_2 - A_0) = (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 1 \cdot (-2) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

Ainsi $\boxed{\text{Sp}(A_0) = \{1, 2\} \text{ et } \text{Sp}(B_0) = \{0, 1\}}.$

Comme A_0 a deux valeurs propres distinctes et $A_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\boxed{A_0 \text{ est diagonalisable}}$. Idem pour B_0 .

- 6) Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = m_{11}E_{11} + m_{12}E_{12} + m_{21}E_{21} + m_{22}E_{22},$

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= \begin{pmatrix} 2m_{21} & 2m_{22} \\ -m_{11} + 3m_{21} & -m_{12} + 3m_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2m_{11} - m_{12} & 2m_{11} - m_{12} \\ 2m_{21} - m_{22} & 2m_{21} - m_{22} \end{pmatrix} \\ &= (-2m_{11} + m_{12} + 2m_{21})E_{11} + (-2m_{11} + m_{12} + 2m_{22})E_{12} \\ &\quad + (-m_{11} + m_{21} + m_{22})E_{21} + (-m_{12} - 2m_{21} + 4m_{22})E_{22} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{H_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}}$$

- 7) D'après l'énoncé, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\det(H_0 - \lambda I_4) = \lambda(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

et donc $\boxed{\text{Sp}(H_0) = \{0, 1, 2\}}.$

- 8) Par ailleurs,

$$\boxed{\{a - b/(a, b) \in \text{Sp}(A_0) \times \text{Sp}(B_0)\} = \{1 - 0, 1 - 1, 2 - 0, 2 - 1\} = \{1, 0, 2\} = \text{Sp}(H_0)}$$

9) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} X \in E_1(H_0) &\iff (H_0 - I_4)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff x = t = \frac{y + 2z}{3} \end{aligned}$$

Ainsi $E_1(H_0)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ qui sont linéairement indépendants : si y et z sont deux complexes tels que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ y \\ z \\ * \end{pmatrix},$$

alors $y = z = 0$.

Donc $E_1(H_0)$ est de dimension 2 et ainsi, la somme des dimensions des sev propres de H_0 est au moins égale à $1 + 1 + 2 = 4$. Donc H_0 est diagonalisable.

Partie III - Étude du cas général

10) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\det(\lambda I_2 - B) = \det((\lambda I - B)^\top) = \det(\lambda I^\top - B^\top) = \det(\lambda I - B^\top)$ s'annule si et seulement si λ est valeur propre de $B^\top$.

Donc B et $B^\top$ ont même spectre.

11) a) En posant $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$,

$$V^t W = (v_i w_j)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Comme V n'est pas nulle, il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v_{i_0} \neq 0$.

De même il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $w_{j_0} \neq 0$.

Ainsi $VW^\top$ n'est pas nulle puisque son coefficient d'indice (i_0, j_0) est non nul.

$$\begin{aligned} h_{A,B}(VW^\top) &= AVW^\top - VW^\top B \\ &= (AV)W^\top - V(B^\top W)^\top = (aV)W^\top - V(bW)^\top = (a - b)VW^\top \end{aligned}$$

Comme $VW^\top$ est de plus non nul, c'est un vecteur propre de $h_{A,B}$ associé à la valeur propre $a - b$.

b) Par la question précédente, $\left\{ a - b / (a, b) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B) \right\} \subset \text{Sp}(h_{A,B})$.

- c) D'après la question précédente, si A et B ont une valeur propre commune λ , alors $0 = \lambda - \lambda \in \text{Sp}(h_{A,B})$ donc il existe une matrice M non nulle dans le noyau de $h_{A,B}$, c'est-à-dire vérifiant $AM = MB$.
- 12) Soit i et j compris entre 1 et n . On voit que $PE_{i,j} = (0 | \dots | 0 | V_i | 0 | \dots | 0)$ où la colonne V_i est à la $j^{\text{ème}}$ place.

$$PE_{i,j} Q^\top = (0 | \dots | 0 | V_i | 0 | \dots | 0) \begin{pmatrix} W_1^\top \\ \vdots \\ W_j^\top \\ \vdots \\ W_n^\top \end{pmatrix} = \boxed{V_i W_j^\top}.$$

L'application ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à toute matrice M associe $PMQ^\top$ est un automorphisme car elle est linéaire bijective (sa réciproque étant $M' \mapsto P^{-1}M' (Q^{-1})^\top$). Comme $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son image $(V_i W_j^\top)_{1 \leq i,j \leq n}$ par ψ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- 13) Supposons A et B diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- a) La matrice B est supposée diagonalisable. Notant $\mu_1, \dots, \mu_p$ ses valeurs propres distinctes et $m_1, \dots, m_p$ les dimensions des sous-espaces propres associés, il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = RDR^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_p I_{m_p} \end{pmatrix}$$

La matrice $B^\top$ est aussi semblable à D car $B^\top = (R^\top)^{-1} D^\top R^\top$ et $D^\top = D$.

Ainsi $B^\top$ est diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que B et les dimensions des sous-espaces propres de $B^\top$ sont aussi $m_1, \dots, m_p$.

- b) Choissant $(V_1, \dots, V_n)$ base de vecteurs propres de A et $(W_1, \dots, W_n)$ base de vecteurs propres de $B^\top$, la famille $(V_i W_j^\top)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de vecteurs propres de $h_{A,B}$.

Ainsi $h_{A,B}$ est diagonalisable.

- 14) a) D'après les questions 12) et 13), la famille $(V_i W_j^\top)_{(i,j) \in [1,n]^2}$ est une base de vecteurs propres pour h_A . Le noyau de h_A est donc l'espace vectoriel engendré par les matrices $V_i W_j^\top$ telles que $h_A(V_i W_j^\top) = 0$. Or, en utilisant la question 13) $h_A(V_i W_j^\top) = (\lambda_i - \lambda_j) V_i W_j^\top$ et donc $h_A(V_i W_j^\top) = 0 \iff \lambda_i = \lambda_j$.

On en déduit que $\text{Ker}(h_A) = \text{Vect}\{V_i W_j^\top, (i,j) \in J\}$. De ce fait $\dim(\text{Ker}(h_A))$ est égal au cardinal de l'ensemble J . En posant pour tout $k \in [1, p]$, $J_k = \{(i,j), \lambda_i = \lambda_j = \mu_k\}$ on a

$$\dim(\text{Ker}(h_A)) = \#J = \sum_{k=1}^p \#J_k = \sum_{k=1}^p m_k^2$$

- b) D'après la question précédente,

$$\dim(\text{Ker}(h_A)) = \sum_{k=1}^p m_k^2 \geq \sum_{k=1}^p m_k = n.$$

En effet, comme m_k est supérieur ou égal à 1, $m_k^2 \geq m_k$. De plus, il n'y a égalité que si $m_k = 1$. De ce fait, $\dim(\text{Ker}(h_A)) = n$ si et seulement si pour tout entier k , $m_k = 1$ ce qui signifie que A admet n valeurs propres distinctes.

15) On suppose que h_A est diagonalisable

On note $(P_\ell)_{\ell \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket}$ une base de vecteurs propres de h_A , chaque matrice P_ℓ étant associée à une valeur propre γ_ℓ de h_A .

Soit λ une valeur propre de A et X est un vecteur propre de A associé à λ . Soit Y un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $MX = Y$. Pour s'en convaincre il suffit de compléter la famille libre $\{X\}$ (elle est libre car $X \neq 0$ puisque c'est un vecteur propre) en une base $\mathcal{B} = (X, X_1, \dots, X_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$. On sait alors qu'il existe un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui envoie tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ vers le vecteur Y .

Maintenant, comme $(P_\ell)_{\ell \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une famille $(x_\ell)_{\ell \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket}$ de complexes tels que $\sum_{\ell \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket} x_\ell P_\ell = M$ et donc

$$Y = MX = \sum_{\ell \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket} x_\ell P_\ell X$$

Cela montre bien que Y est dans l'espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(P_\ell X)_{\ell \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket}$.

Maintenant, la famille considérée ci-dessus est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On peut donc en extraire une base. Il existe alors une partie J de $\llbracket 1, n^2 \rrbracket$ de cardinal n tel que $(P_\ell X)_{\ell \in J}$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Notons alors que pour tout $\ell \in J$, comme $h_A(P_\ell) = \gamma_\ell P_\ell$,

$$AP_\ell X = (P_\ell A + \gamma_\ell P_{ij})X = (\lambda + \gamma_\ell)P_\ell X$$

On a donc trouvé une base de vecteurs propres de A . Cela implique que A est diagonalisable.