

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
L'exercice et le problème sont indépendants*

Exercice

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Question de cours : montrer que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
- 2) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$? Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note γ leur limite commune.
- 3) Soit n un entier strictement positif et $t \in [0, n]$.

a) Montrer que $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

b) Montrer que $e^{t/n} \left(1 - \frac{t}{n}\right) \geq 1 - \frac{t^2}{n^2}$.

c) Montrer que pour tout $y \in [0, 1]$, $(1-y)^n \geq 1 - ny$.

d) En déduire que

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

- 4) Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$, puis que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ diverge.

On pose désormais

$$F(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad (x \geq 0) \quad \text{et} \quad E_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0).$$

- 5) Justifier l'existence de $E_1(x)$ pour $x > 0$ et montrer que $0 \leq E_1(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.
- 6) Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \ln x + C + E_1(x)$$

- 7) Soit $n \geq 1$. À l'aide du changement de variable $u = 1 - \frac{t}{n}$, montrer que

$$\int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt = H_n$$

- 8) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq H_n - F(n) \leq \frac{1}{n}$, puis en déduire que $C = \gamma$.

- 9) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} dt$ converge.

- 10) Soit $x > 0$. Montrer que

$$\int_0^x (\ln t) e^{-t} dt = (1 - e^{-x}) \ln x - F(x)$$

- 11) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} dt = -\gamma$$

Problème

Dans ce problème, n désigne un entier strictement positif.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\text{Sp}(A)$ son spectre et, pour tout scalaire λ , $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$. On utilise les mêmes notations $\text{Sp}(f)$ et $E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie E .

Pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $h_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad h_{A,B}(M) = AM - MB.$$

Dans le cas où $A = B$ on notera plus simplement h_A pour $h_{A,A}$.

Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1. On rappelle que $(E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I - Un premier exemple

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de symétrie, c'est-à-dire vérifiant $S^2 = I_n$.

1) Justifier l'existence de $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}SP = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-p} \end{array} \right) = S', \quad \text{où } p = \dim \text{Ker}(S - I_n).$$

On fixe une telle matrice P . On considère

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\longmapsto P^{-1}MP. \end{aligned}$$

2) a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $M' = \theta(M)$. Montrer que

$$(M \in E_\lambda(h_S)) \iff (M' \in E_\lambda(h_{S'})).$$

En déduire que h_S et $h_{S'}$ ont même spectre.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$. Calculer $h_{S'}(M')$ où $M' = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$.

En déduire les sous-espaces propres de $h_{S'}$, ainsi que leurs dimensions respectives en fonction de p et n .

3) En déduire que h_S est diagonalisable.

4) a) Vérifier que $\text{Sp}(h_S) = \{a - b \mid (a, b) \in \text{Sp}(S) \times \text{Sp}(S)\}$.

b) Vérifier que $\dim \text{Ker}(h_S) = m(1)^2 + m(-1)^2$, où l'on a posé $m(\lambda) = \dim E_\lambda(S)$ pour $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Partie II - Un deuxième exemple

Soit A_0 et B_0 les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ données par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) Déterminer $\text{Sp}(A_0)$ et $\text{Sp}(B_0)$ et montrer que A_0 et B_0 sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On note H_0 la matrice de l'endomorphisme h_{A_0, B_0} dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

- 6) Déterminer H_0 .
- 7) Déterminer $\text{Sp}(H_0)$. On admettra que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\det(H_0 - \lambda I_4) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda$.
- 8) En déduire que $\text{Sp}(H_0) = \{a - b \mid (a, b) \in \text{Sp}(A_0) \times \text{Sp}(B_0)\}$.
- 9) La matrice H_0 est-elle diagonalisable ?

Partie III - Étude du cas général

Dans la suite du problème, A et B sont quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose d'étudier les liens existant entre la diagonalisabilité de A et B et celle de $h_{A,B}$.

- 10) Montrer que B et $B^\top$ ont même spectre.
- 11) Soit $a \in \text{Sp}(A)$ et $b \in \text{Sp}(B) = \text{Sp}(B^\top)$. On fixe $(V, W) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$ tels que $AV = aV$ et $B^\top W = bW$.
 - a) Montrer que $VW^\top$ est un vecteur propre de $h_{A,B}$.
 - b) En déduire que $\{a - b \mid (a, b) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)\} \subset \text{Sp}(h_{A,B})$.
 - c) En déduire que si A et B ont une valeur propre commune, alors il existe une matrice M non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$.
- 12) Soient $(V_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(W_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ deux bases de $\mathbb{C}^n$, identifiées à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note P et Q les matrices dont les colonnes sont respectivement $(V_1, \dots, V_n)$ et $(W_1, \dots, W_n)$. Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $PE_{i,j}Q^\top$. En déduire que la famille $(V_i W_j^\top)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- 13) On suppose dans cette question que A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
 - a) Montrer que $B^\top$ est diagonalisable et que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(B)$ on a

$$\dim \text{Ker}(B - \lambda I_n) = \dim \text{Ker}(B^\top - \lambda I_n)$$

- b) Montrer que $h_{A,B}$ est diagonalisable et préciser $\text{Sp}(h_{A,B})$.

Dans la suite du problème, on suppose que $B = A$.

- 14) On suppose que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on note $(V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres de A , chaque vecteur V_i étant associé à la valeur propre λ_i . D'après ce qui précède la matrice $A^\top$ est également diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que A , et les sous-espaces propres de A et $A^\top$ associés à une même valeur propre ont même dimension. Il existe donc une base $(W_1, \dots, W_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad A^\top W_i = \lambda_i W_i$.
 - a) On note $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de A et on pose $m_k = \dim E_{\mu_k}(A)$ pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On note aussi $J = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid \lambda_i = \lambda_j\}$. Montrer que

$$\text{Ker}(h_A) = \text{Vect}\{V_i W_j^\top \mid (i, j) \in J\} \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker}(h_A) = \sum_{k=1}^p m_k^2.$$

- b) Montrer que $\dim \text{Ker}(h_A) \geq n$ et que l'égalité a lieu si et seulement si A admet n valeurs propres distinctes.
- 15) On suppose que h_A est diagonalisable et on note $(P_\ell)_{\ell \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket}$ une base de vecteurs propres de h_A .

On admet que A admet au moins une valeur propre notée λ . On considère un vecteur propre X associé.

Montrer la famille $(P_\ell X)_{\ell \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En déduire que A est diagonalisable.