

1.	Suites de fonctions	1
1.1	Limites et continuité	1
1.2	Dérivation et intégration	2
2.	Séries de fonctions	4
2.1	Limite et continuité	4
2.2	Intégration et dérivation	6

1. Suites de fonctions

1.1 Limites et continuité

Théorème 1.1 (Continuité)

Soit $(f_n) \in (\mathcal{F}(X, \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur X et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

Soit $a \in X$.

On suppose que

- i) pour tout entier n , f_n est continue en a ,
- ii) la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur X

Alors, la fonction f est continue en a .

Corollaire 1.2 (Continuité avec convergence uniforme locale)

Soit $(f_n) \in (\mathcal{F}(X, \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur X et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

On suppose que

- i) pour tout entier n , f_n est continue,
- ii) pour tout a de X il existe un voisinage V_a tel que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur V_a vers f .

Alors, la fonction f est continue sur X .

Théorème 1.3 (Double limite pour les suite de fonctions)

Soit $(f_n) \in (\mathcal{F}(X, \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur X et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

Soit a un point adhérent à X .

On suppose que

- i) pour tout n , f_n admet en a une limite finie $\ell_n \in \mathbb{K}$.
- ii) La suite de fonctions converge uniformément vers f au voisinage de a

Alors la suite (ℓ_n) converge (vers ℓ) et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Remarque : Dans le cas où $A \subset \mathbb{R}$. S'il n'est pas majoré (resp. minoré) on peut prendre $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).

1.2 Dérivation et intégration

Proposition 1.4 (Intégration)

Soit I un intervalle.

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ une suite de fonctions définie sur I et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

On suppose que

- i) Pour tout entier n , f_n est continue
- ii) La suite de fonctions converge uniformément vers f sur tout segment J vers S .

Soit a un élément de I , on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n$ la primitive de f_n qui s'annule en a et $F : x \mapsto \int_a^x f$ la primitive de f qui s'annule en a .

Alors la suite (F_n) converge uniformément sur tout segment J de I vers F .

Corollaire 1.5 (Intégration sur un segment)

Soit $[a, b]$ un segment

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$ une suite de fonctions définie sur $[a, b]$ et $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

On suppose que

- i) Pour tout entier n , f_n est continue
- ii) La suite de fonctions converge uniformément vers f sur le segment $[a, b]$.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

Théorème 1.6 (Dérivation termes à termes)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que

- i) Pour tout entier n , la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- ii) La suite de fonctions (f_n) converge (simplement) vers une fonction f .
- iii) La suite des fonctions dérivées (f'_n) converge **uniformément** sur tout segment J de I vers une fonction g .

Alors

- la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.
- la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment J vers f

Corollaire 1.7 (Caractère $\mathcal{C}^k$)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{K}$. Soit k un entier. On suppose que

- i) Pour tout entier n , la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .
- ii) Pour tout $i \in \llbracket 0 ; k - 1 \rrbracket$, la suite de fonctions $(f_n^{(i)})$ converge (simplement) vers une fonction g_i
- iii) La suite des fonctions dérivées k -ième $(f_n^{(k)})$ converge **uniformément** sur tout segment J de I vers une fonction g_k .

On pose $f = g_0$. Alors

- f est de classe $\mathcal{C}^k$
- pour tout $i \in \llbracket 0 ; k \rrbracket$, $f^{(i)} = g_i$

On peut généraliser pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Corollaire 1.8 (Caractère $\mathcal{C}^\infty$)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{K}$. On suppose que

- i) Pour tout entier n , la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .
- ii) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, la suite de fonctions $(f_n^{(i)})$ converge (simplement) vers une fonction g_i
- iii) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, la suite des fonctions dérivées i -ième $(f_n^{(i)})$ converge **uniformément** sur tout segment J de I vers la fonction g_i .

On pose $f = g_0$. Alors :

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$
- pour tout $i \in \mathbf{N}$, $f^{(i)} = g_i$

2. Séries de fonctions

Nous allons réécrire les résultats démontrés précédemment sur les suites de fonctions dans le cadre des séries de fonctions.

2.1 Limite et continuité

Théorème 2.9 (Continuité)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur A . Soit $a \in A$.

On suppose que

- i) pour tout entier n , f_n est continue en a ,
- ii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément

On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la limite de la série.

Alors

Corollaire 2.10 (Continuité avec convergence uniforme locale)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur A .

On suppose que

- i) pour tout entier n , f_n est continue,
- ii) pour tout a de A il existe un voisinage V_a tel que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur V_a .

On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la limite de la série.

Alors

Théorème 2.11 (Double limite pour les séries de fonctions)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur A et a un point adhérent à A . On suppose que

- i) La série de fonctions converge uniformément vers S au voisinage de a
- ii) pour tout n , f_n admet en a une limite finie $\ell_n \in \mathbf{K}$.

Alors

—

—

C'est-à-dire

Remarque : Dans le cas où $A \subset \mathbf{R}$. S'il n'est pas majoré (resp. minoré) on peut prendre $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).

2.2 Intégration et dérivation

Proposition 2.12

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{K}$. On suppose que

- i) Pour tout entier n , f_n est continue
- ii) La série de fonctions converge uniformément sur tout segment J vers S . La limite de la série de fonctions est la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Pour tout a de I on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n$ la primitive de f_n qui s'annule en a .

Alors la série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment J de I vers la fonction $x \mapsto \int_a^x S$. C'est-à-dire,

$$\forall x \in I, \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n = \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Théorème 2.13 (Intégration sur un segment)

Soit $[a, b]$ un segment

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur $[a, b]$.

On suppose que

- i) Pour tout entier n , f_n est continue
- ii) La série de fonctions converge uniformément sur le segment $[a, b]$. La limite de la série de fonctions est la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Théorème 2.14 (Dérivation termes à termes)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.

On suppose que

- i) Pour tout entier n , f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- ii) la série de fonctions converge (simplement) vers S sur I ,
- iii) la série de fonctions des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment J vers une fonction T

Alors :

—

—

—

Corollaire 2.15 (Caractère $\mathcal{C}^k$)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{K}$ et $k \in \mathbf{N}$. On suppose que

- i) Pour tout entier n , f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
- ii) pour $i < k$ les séries de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers S_i sur I ,
- iii) la série de fonctions des dérivées k -ième $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment J vers S_k

Alors :

—

—

—

Corollaire 2.16 (Caractère $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{K}$. On suppose que

- i) Pour tout entier n , f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ,
- ii) pour tout entier i , les séries de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers S_i sur I ,
- iii) pour tout entier i , les séries de fonctions des dérivées i -ième $\sum f_n^{(i)}$ convergent uniformément sur tout segment J

Alors :

—

—