

Dénombrabilité et familles sommables

1	Ensembles dénombrables	2
1.1	Définitions	2
1.2	Propriétés et exemples	8
2	Familles sommables	15
2.1	Rappel sur l'ensemble $[0, +\infty]$	15
2.2	Familles sommables d'éléments de $[0, +\infty]$	17
2.3	Familles sommables de nombres complexes	37
2.4	Produit de Cauchy	52

1 Ensembles dénombrables

1.1 Définitions

Commençons par rappeler quelques définitions du cours de première année sur les ensembles finis.

Définition 6.1 (Équipotence)

Soit X et Y deux ensembles. Ils sont dit équipotents s'il existe une bijection $\varphi : X \rightarrow Y$.

Remarques :

1. La relation d'équipotence est parfois notée $\equiv$
2. La relation d'équipotence vérifie les axiomes des relations d'équivalence.
 - Réflexivité. Pour tout ensemble X , en posant $\varphi = \text{id}_X$ on a bien une bijection $\varphi : X \rightarrow X$.
 - Symétrie. Soit X, Y deux ensembles tels qu'il existe une bijection $\varphi : X \rightarrow Y$ de X sur Y . La bijection réciproque φ^{-1} est une bijection de Y sur X .
 - Transitivité. Soit X, Y et Z trois ensembles tels qu'il existe des bijections $\varphi_1 : X \rightarrow Y$ et $\varphi_2 : Y \rightarrow Z$. La composée $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est une bijection de X sur Z .

Définition 6.2 (Ensembles finis)

Un ensemble X est dit fini s'il est équipotent à un ensemble de la forme $[[1; p]]$ où $p \in \mathbb{N}$.

Remarques :

1. Les ensembles $[[1; p]]$ peuvent être vus comme des « prototypes » d'ensembles finis.
2. Pour $p = 0$, $[[1; 0]] = \emptyset$ qui est un ensemble fini.

Proposition-Définition 6.3 (Cardinal)

Soit X un ensemble fini. Il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $X \equiv [[1; p]]$. On appelle cardinal de X cet unique entier p . On le note

$$|X| \text{ ou } \#X \text{ ou } \text{Card}(X)$$

Définition 6.4 (Ensembles dénombrables)

Soit X un ensemble.

1. *il est dit dénombrable s'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans X .*
2. *il est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Remarques :

1. Un ensemble X dénombrable peut être énumérer ; $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ en posant $x_i = \varphi(i)$.
2. Soit X un ensemble dénombrable et Y un ensemble. S'il existe une bijection de X dans Y alors Y est aussi dénombrable.
3. Un ensemble fini n'est pas dénombrable mais il est au plus dénombrable.

Exemples :

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Proposition 6.5

Une partie X de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.

Démonstration : Soit X une partie de $\mathbb{N}$.

- On suppose que X est majorée. Notons N un majorant de X . On voit alors que $X \subset \llbracket 1 ; N \rrbracket$. On en déduit que X est finie car c'est une partie d'un ensemble fini.
- On suppose que X n'est pas majorée. On pose $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$ définie par

$$\begin{aligned}\varphi : 0 &\mapsto \min(X) \\ 1 &\mapsto \min(X \setminus \{\varphi(0)\}) \\ &\vdots \\ n &\mapsto \min(X \setminus \varphi(\llbracket 0 ; n-1 \rrbracket))\end{aligned}$$

Comm X n'est pas majorée pour tout entier n , $X \setminus \varphi(\llbracket 0 ; n-1 \rrbracket)$ n'est pas vide.

Il faut alors vérifier que φ est une bijection.

- Par construction, φ est strictement croissante donc injective.
- On remarque que pour $x \in X$, $x = \varphi(n)$ où $n = \#\{k \in X \mid k < x\}$. Cela montre que φ est surjective.

□

Corollaire 6.6

Soit X un ensemble. Il est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Démonstration :

- $\Rightarrow$ Si X est dénombrable, il est en bijection avec $\mathbb{N}$. S'il est fini, il est en bijection avec $\llbracket 1 ; \#X \rrbracket$.
- $\Leftarrow$ Si X est en bijection avec Y qui est une partie de $\mathbb{N}$. Si Y est dénombrable alors X aussi ; si Y est finie alors X aussi.

□

Corollaire 6.7

Soit X un ensemble tel qu'il existe une injection $\iota : X \rightarrow Y$ où Y est au plus dénombrable . Alors X est au plus dénombrable.

Démonstration : Il existe une partie Z de $\mathbb{N}$ et $\varphi : Y \rightarrow Z$ une bijection. L'application $\varphi \circ \iota : X \rightarrow Z$ est injective. On en déduit que X est en bijection avec $(\varphi \circ \iota)(X)$ qui est une partie de $\mathbb{N}$. Cela montre que X est au plus dénombrable.

□

Corollaire 6.8

Un ensemble X tel qu'il existe une surjection $s : Y \rightarrow X$ où Y est fini ou dénombrable. Alors X est fini ou dénombrable.

Démonstration : Il existe une partie Z de $\mathbf{N}$ et une bijection $\varphi : Z \rightarrow Y$. En composant, $s \circ \varphi$ est une surjection de Z dans X .

On peut alors construire une injection $\iota : X \hookrightarrow \mathbf{N}$ en associant à tout élément x son plus petit antécédent par $s \circ \varphi$. Il suffit alors d'utiliser le corollaire précédent pour obtenir que X est au plus dénombrable. $\square$

1.2 Propriétés et exemples

Proposition 6.9

Un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

C'est à dire que si $r \in \mathbf{N}$ et $X_1, \dots, X_r$ sont des ensembles au plus dénombrables alors $X_1 \times \dots \times X_r$ est au plus dénombrable

Démonstration : (Non exigible) Soit $X_1, \dots, X_r$ des ensembles au plus dénombrables. On note φ_i une injection de X_i dans $\mathbf{N}$ pour $i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$. On considère $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers deux à deux distincts et on construit alors $\iota : X_1 \times \dots \times X_r \rightarrow \mathbf{N}$ par

$$\begin{aligned} \iota : X_1 \times \dots \times X_r &\rightarrow \mathbf{N} \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto p_1^{\varphi_1(x_1)} \times \dots \times p_r^{\varphi_r(x_r)} \end{aligned}$$

Justifions que ι est injective. Soit $u = (x_1, \dots, x_r)$ et $v = (y_1, \dots, y_r)$ deux éléments de $X_1 \times \dots \times X_r$ tels que $\iota(u) = \iota(v)$. Par unicité de la décomposition en nombres premiers, pour tout $i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$, $\varphi_i(x_i) = \varphi_i(y_i)$. En utilisant l'injectivité des applications $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, on obtient que pour tout $i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$, $x_i = y_i$ ce qui signifie que $u = v$.

On en déduit qu'il existe une injection $\iota : X_1 \times \dots \times X_r \hookrightarrow \mathbf{N}$. Cela montre que $X_1 \times \dots \times X_r$ est au plus dénombrable. $\square$

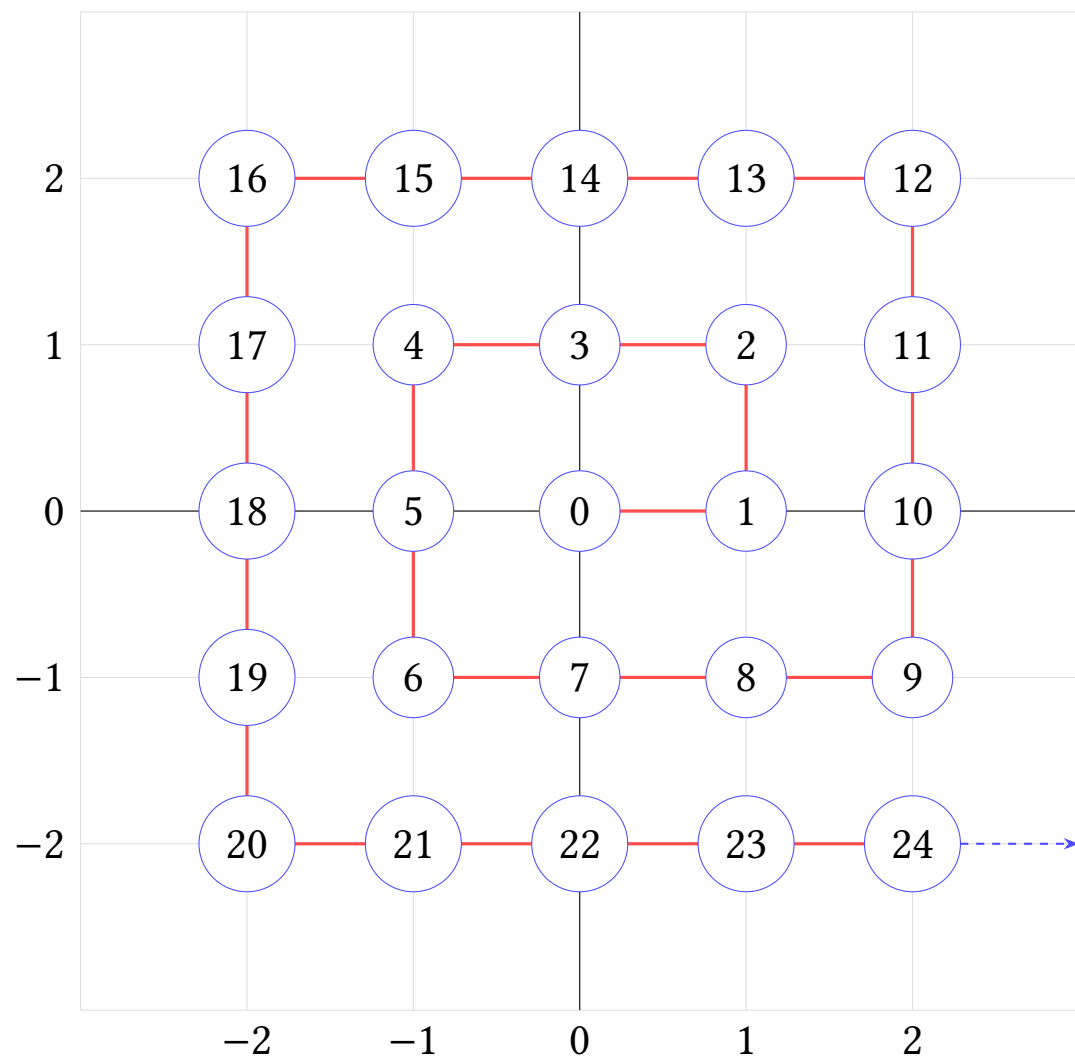
Exemples :

1. On en déduit que $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^2$ et de manière générale $\mathbb{Z}^r$ sont dénombrables.
2. Tout nombre rationnel r s'écrit de manière unique sous la forme $r = \frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ en prenant pour convention que $0 = \frac{0}{1}$.

On construit ainsi une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$ et donc dans $\mathbb{N}$ en composant avec une bijection de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{N}$.

On en déduit que $\mathbb{Q}$ est au plus dénombrable et donc dénombrable car il n'est pas fini.

3. On peut construire des bijections explicites de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}^2$. La représentation graphique ci-dessous montre comment numéroter tous les éléments de $\mathbb{Z}^2$.



Proposition 6.10

Une réunion d'un nombre au plus dénombrables d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

C'est-à-dire que si I est au plus dénombrable et que $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles qui sont au plus dénombrables alors $\bigcup_{i \in I} X_i$ est au plus dénombrable.

Démonstration : (Non exigible) On considère $(X_i)_{i \in I}$ des ensembles au plus dénombrables indexés par un ensemble I au plus dénombrable. On se donne donc des injections $\varphi_i : X_i \rightarrow \mathbb{N}$ et une injection $\psi : I \rightarrow \mathbb{N}$. On pose $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Pour tout x de X on note $I_x = \{i \in I \mid x \in X_i\}$ puis i_x l'élément de I_x tel que pour tout $i \in I_x$, $\psi(i_x) \leq \psi(i)$.

On pose alors $\Phi : X \rightarrow \mathbb{N}^2$ définie par $\Phi : x \mapsto (\psi(i_x), \varphi_{i_x}(x))$.

Il est alors élémentaire de vérifier que Φ est injective. En composant avec une injection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ on obtient que E est au plus dénombrable.

□

Corollaire 6.11

1. On retrouve que $\mathbb{Z}$ est dénombrable car $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$.
2. On retrouve que $\mathbb{Q}$ est dénombrable car $\mathbb{Q} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p} \mathbb{Z}$.

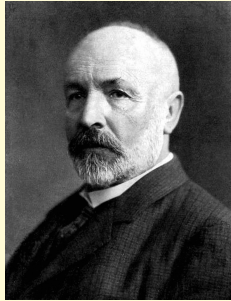
ATTENTION

Il n'est pas vrai cependant qu'un produit cartésien d'un nombre dénombrable d'ensembles dénombrables (et même fini) est dénombrable.

Exemple : Montrons que $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. L'ensemble X est l'ensemble des suites de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$.

Remarque : Ce procédé s'appelle l'extraction diagonale de Cantor.

Matheux (Georg Cantor : 1845 - 1918)



Georg Cantor est un mathématicien allemand, né le 3 mars 1845 à Saint-Petersbourg (Empire russe) et mort le 6 janvier 1918 à Halle (Empire allemand). Il est connu pour être le créateur de la théorie des ensembles.

Il établit l'importance de la bijection entre les ensembles, définit les ensembles infinis et les ensembles bien ordonnés. Il prouva également que les nombres réels sont « plus nombreux » que les entiers naturels. En fait, le théorème de Cantor implique l'existence d'une « infinité d'infinis ». Il définit les nombres cardinaux, les nombres ordinaux et leur arithmétique. Le travail de Cantor est d'un grand intérêt philosophique et a donné lieu à maintes interprétations et à maints débats.

Cantor a été confronté à la résistance de la part des mathématiciens de son époque, en particulier Kronecker. Dans le but de contrer les détracteurs de Cantor, David Hilbert a affirmé : « Nul ne doit nous exclure du Paradis que Cantor a créé. »

Corollaire 6.12

L'ensemble $\mathbf{R}$ n'est pas (au plus) dénombrable.

Démonstration : (Non exigible) Il suffit de montrer que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. Via l'écriture binaire, $[0, 1[$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ non stationnaires à 1.

En effet, tout nombre réel x dans $[0, 1[$ s'écrit :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 2^{-(n+1)}$$

Il y a unicité de cette écriture si on supprime les suites (u_n) qui sont stationnaires à 1.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites stationnaires à 1. Pour tout entier $N \in \mathbf{N}$, on pose $\mathcal{S}_N$ l'ensemble des suites (u_n) telles que pour $n \geq N$, $u_n = 1$. On voit que $\mathcal{S}_N$ est un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc une réunion dénombrable d'ensembles finis, c'est un ensemble au plus dénombrable.

Comme l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ n'est pas dénombrable et que $\mathcal{S}$ est dénombrable, $\mathcal{P}$ n'est pas dénombrable.

Cela permet de montrer que $[0, 1[$ puis $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

□

2 Familles sommables

Nous allons nous intéresser aux familles sommables. L'idée est proche de celle des séries. On va considérer des familles $(u_i)_{i \in I}$ de nombres (réels ou complexes) indexées par un ensemble I (généralisant le cas des suites où $I = \mathbb{N}$). Le but est d'alors de définir la somme de tous ces termes $\sum_{i \in I} u_i$ quand cela a un sens.

2.1 Rappel sur l'ensemble $[0, +\infty]$

Nous allons commencer par rappeler quelques conventions sur l'ensemble $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Proposition-Définition 6.13 (Règles de calculs)

L'addition et le produit de $\mathbb{R}_+$ se prolonge à l'ensemble $[0, +\infty]$. Précisément pour x, y dans $[0, +\infty]$ on pose

$$x + y = \begin{cases} x + y & \text{si } x, y \in \mathbb{R}_+ \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } xy = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ xy & \text{si } x, y \in \mathbb{R}_+ \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec ces conventions, les règles usuelles de calculs (commutativité, associativité, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) restent vraies.

Remarque : Notons en particulier de $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.

Proposition-Définition 6.14 (Relation d'ordre)

La relation d'ordre usuelle de $\mathbf{R}_+$ se prolonge à l'ensemble $[0, +\infty]$. Pour x, y dans $[0, +\infty]$,

$$x \leq y \iff [(y = +\infty) \text{ ou } (x, y \in \mathbf{R}_+ \text{ et } x \leq y)]$$

Remarque : On vérifie aisément que la relation d'ordre reste compatible aux deux opérations dans le sens où pour x, y, z, t dans $[0, +\infty]$

$$\begin{cases} x \leq y \\ z \leq t \end{cases} \Rightarrow ((x + z) \leq (y + t) \text{ et } xz \leq yt)$$

Proposition 6.15

Soit A une partie non vide d'éléments de $[0, +\infty]$. Elle admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$. Plus précisément :

- si $A \subset \mathbf{R}_+$ et A est majorée, la borne supérieure de A vue comme partie de $[0, +\infty]$ est la même que celle de A vue comme partie de $\mathbf{R}_+$
- si $+\infty \in A$ ou $A \subset \mathbf{R}_+$ et n'est pas majorée, $\sup(A) = +\infty$.

Remarque : Pour une partie A de $[0, +\infty]$ on dira (par abus) qu'elle est majorée si $\sup(A) < +\infty$. C'est un abus car, par définition, toute partie $[0, +\infty]$ est majorée puisque pour tout $x \in [0, +\infty]$, $x \leq +\infty$.

2.2 Familles sommables d'éléments de $[0, +\infty]$

Définition 6.16

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ indexée par I .

- On appelle somme de la famille et on note $\sum_{i \in I} u_i$ l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{i \in J} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} u_i, J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$$

- La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Cela signifie que $\left\{ \sum_{i \in J} u_i, J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$ est majoré (dans $\mathbf{R}_+$).

ATTENTION

Dans le cas où on travaille avec des réels positifs, on peut toujours définir $\sum_{i \in I} u_i$.

- Si $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$ la famille n'est pas sommable.
- Si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$ la famille est sommable.

Remarques :

1. Si I est fini, la famille est sommable et $\sum_{i \in I} u_i$ est la somme des termes.
2. S'il existe $i \in I$ tel que $u_i = +\infty$ alors $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

Proposition 6.17

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels positifs, le support de la famille c'est-à-dire l'ensemble $T = \{i \in I, u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Démonstration : Notons $S = \sum_{i \in I} u_i < +\infty$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on considère $I_p = \left\{ i \in I, u_i > \frac{1}{p} \right\}$.

L'ensemble I_p est fini et on a même $\#I_p \leq pS$. En effet, si on suppose que I_p contient strictement plus de pS éléments. Soit J une partie finie de I_p contenant strictement plus de pS éléments,

$$S \geq \sum_{i \in J} u_i \geq \sum_{i \in J} \frac{1}{p} > pS \times \frac{1}{p} = S$$

C'est donc absurde.

On voit alors que l'ensemble $T = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} I_p$ est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensemble finis.

□

Proposition 6.18 (Croissance de la somme)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $[0, +\infty]$ indexées par un ensemble I . Si pour tout i de I , $u_i \leq v_i$ alors

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$$

En particulier si $(v_i)_{i \in I}$ est sommable, $(u_i)_{i \in I}$ aussi.

Démonstration :

Proposition 6.19

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ et $J \subset I$. Dans $[0, +\infty]$

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

En particulier, si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable alors $(u_i)_{i \in J}$ aussi.

Démonstration :

Proposition 6.20 (Lien avec les séries)

Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de réels positifs indexées par $I = \mathbb{N}$.

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$$

En particulier $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{i \geq 0} u_i$ est convergente.

Démonstration : On procède par double inégalité

Proposition 6.21 (Invariance par permutation des indices)

Soit (u_i) une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ indexée par I . Soit J un ensemble en bijection avec I et φ une bijection de J dans I . Pour tout $j \in J$ on pose $v_j = u_{\varphi(j)}$. On a alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} v_j$$

En particulier la famille $(v_j)_{j \in J}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i \in I}$ l'est.

Démonstration : Notons $U = \{\sum_{i \in I'} u_i, I' \subset I \text{ et } I' \text{ fini}\}$ et $V = \{\sum_{j \in J'} v_j, J' \subset J \text{ et } J' \text{ fini}\}$.

Soit $x \in V$. Il existe $J' \subset J$ un ensemble fini tel que $x = \sum_{j \in J'} v_j$. Si on note $I' = \varphi(J')$ alors I' est une partie finie de I et

$$\sum_{j \in J'} v_j = \sum_{j \in J'} u_{\varphi(j)} = \sum_{i \in I'} u_i$$

Cela montre que $x \in U$ et donc $V \subset U$.

On peut considérer φ^{-1} qui est une bijection de I dans J pour montrer que réciproquement $U \subset V$.

Finalement $U = V$ et donc

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup(U) = \sup(V) = \sum_{j \in J} v_j$$

En particulier la famille $(v_j)_{j \in J}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i \in I}$ l'est.

Proposition 6.22 (Opérations)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $[0, +\infty]$ indexées par I . Soit k un réel positif,

$$\sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i \text{ et } \sum_{i \in I} (ku_i) = k \sum_{i \in I} u_i$$

Démonstration : En exercice. □

Théorème 6.23 (Somme par paquets - cas réels positifs)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs indexée par I . Soit $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I . Dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i$$

En particulier, $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si toutes les familles $(u_i)_{i \in I_j}$ sont sommables et que la famille $\left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J}$ est sommable.

Démonstration : (Hors Programme) . On va démontrer cette égalité par double inégalité.

- $\boxed{\geq}$ Soit $K \subset I$ un ensemble fini. Pour tout $j \in J$, on note $K_j = K \cap I_j$ et on considère T l'ensemble des indices j tels que $K_j \neq \emptyset$.

On voit que T est une partie finie de J et que pour tout $j \in J$, K_j est une partie finie de I_j . On en déduit que

$$\sum_{i \in K} u_i = \sum_{j \in T} \left(\sum_{i \in K_j} u_i \right) \leq \sum_{j \in T} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) \leq \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Cela montre par passage au sup que

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

– $\boxed{\leq}$ Soit J' une partie finie de J , on veut majorer $\sum_{j \in J'} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$.

– S'il existe $j \in J'$ tel que $\sum_{i \in I_j} u_i = +\infty$, on a aussi $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$. On en déduit que

$$\sum_{j \in J'} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = +\infty \leq \sum_{i \in I} u_i$$

– Si, pour tout $j \in J'$, $\sum_{i \in I_j} u_i < +\infty$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on note $N = \#J'$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $j \in J'$, il existe une partie finie X_j de I_j telle que

$$\sum_{i \in I_j} u_i - \frac{\varepsilon}{N} \leq \sum_{i \in X_j} u_i \leq \sum_{i \in I_j} u_i$$

En faisant la somme sur tous les éléments de J' et en notant $X = \bigcup_{j \in J'} X_j$,

$$\sum_{j \in J'} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) - \varepsilon \leq \sum_{j \in J'} \left(\sum_{i \in X_j} u_i \right) = \sum_{i \in X} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

L'inégalité de droite venant du fait que X est un ensemble fini.
 Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\sum_{j \in J'} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) \leq \sum_{i \in I} u_i$$

Cela implique par passage au sup que

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) \leq \sum_{i \in I} u_i$$

□

Remarques :

1. Ce théorème est important. C'est celui que l'on utilisera le plus souvent.
2. S'il existe un $j \in J$ tel que $\sum_{i \in I_j} u_i = +\infty$ alors automatiquement $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = +\infty$ et donc $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

Corollaire 6.24 (Théorème de Fubini)

Soit A, B deux ensembles et $I = A \times B$. Soit $(u_{a,b})_{(a,b) \in I}$ une famille de réels positifs. On a

$$\sum_{a \in A} \left(\sum_{b \in B} u_{a,b} \right) = \sum_{b \in B} \left(\sum_{a \in A} u_{a,b} \right) = \sum_{(a,b) \in A \times B} u_{a,b}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème de sommation par paquets en voyant que si on pose pour tout $a \in A$, $I_a = \{a\} \times B$, les ensembles I_a forment une partition de I . $\square$

Remarque : On l'utilisera la plupart du temps avec $A = B = \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$). Une famille de réels positifs $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si :

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la famille $(u_{p,q})_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable ce qui revient à demander que la série $\sum_{q \geq 0} u_{p,q}$ converge.
- la famille $\left(\sum_{q \in \mathbb{N}} u_{p,q} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable ce qui revient au fait que la série $\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} u_{p,q} \right)$ converge.

Matheux (Guido Fubini : 1879 - 1943)



Né à Venise, Guido Fubini (19 janvier 1879 - 6 juin 1943) est poussé vers les mathématiques à un âge précoce, encouragé par ses professeurs et par son père, lui-même professeur de mathématiques. En 1896 il intègre l'École normale supérieure de Pise, où il est l'élève d'Ulisse Dini et de Luigi Bianchi. Il acquiert une certaine notoriété dès 1902, lorsque sa thèse de doctorat (datant de 1900), intitulée *le parallélisme de Clifford dans les espaces elliptiques*, est discutée dans un travail très lu sur la géométrie différentielle publié par Bianchi. Il est célèbre notamment pour ses travaux sur les intégrales, en particulier le théorème de Fubini.

Exemples :

1. On considère la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*}$ définie par

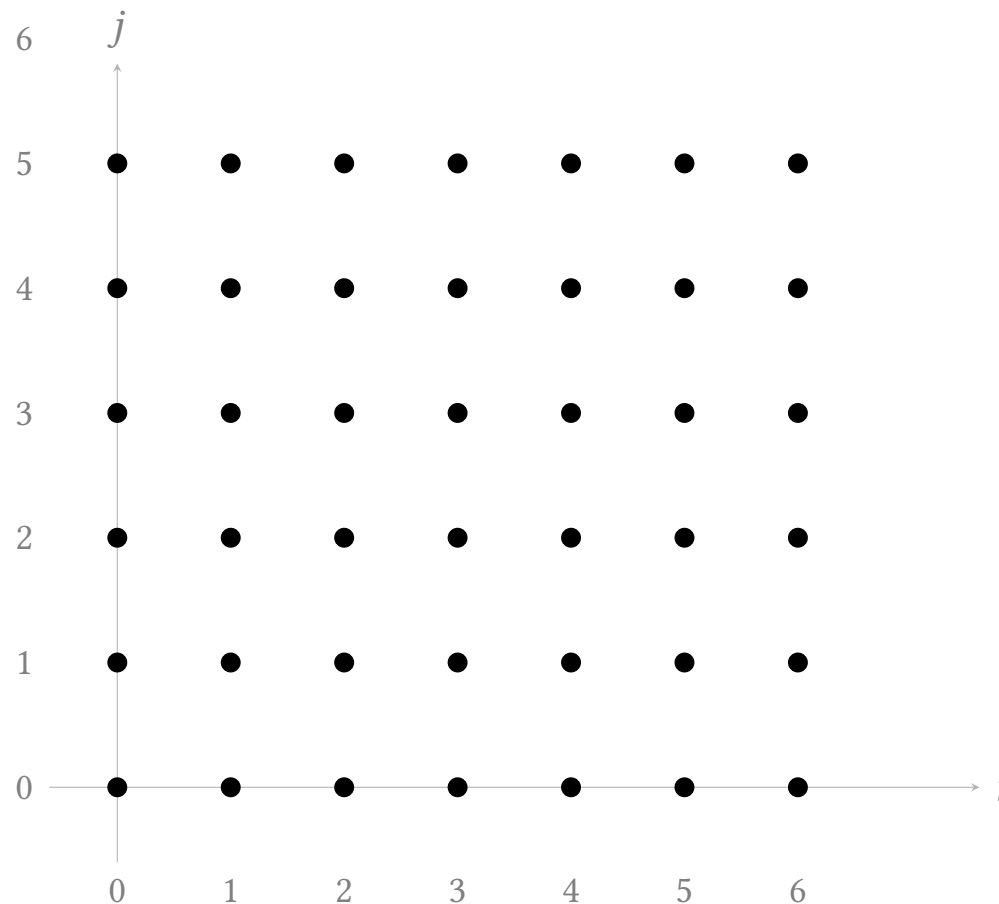
$$\forall (p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*, u_{p,q} = \frac{1}{(p + q^2)(p + q^2 + 1)}$$

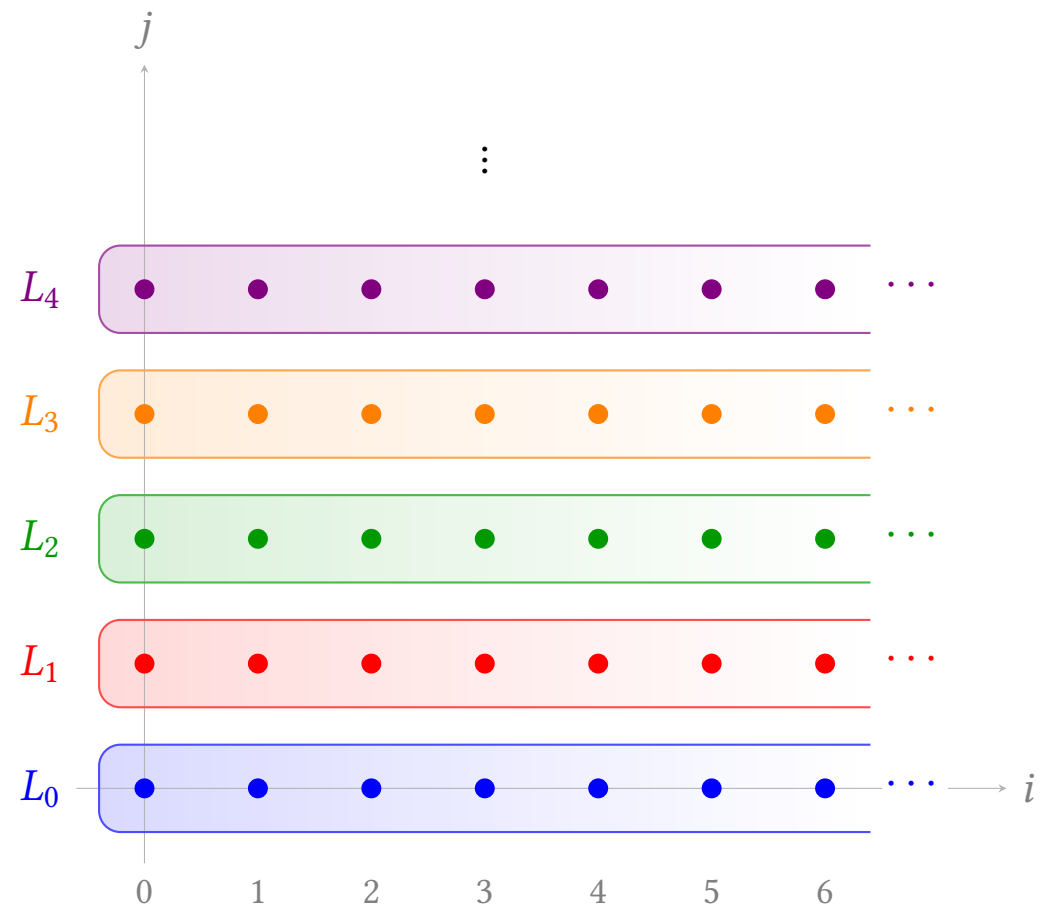
On veut calculer sa somme (et donc voir si elle est sommable).

2. On considère la famille $u_{p,q} = \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ où $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$. On veut savoir pour quels $\alpha > 0$ la famille est sommable.

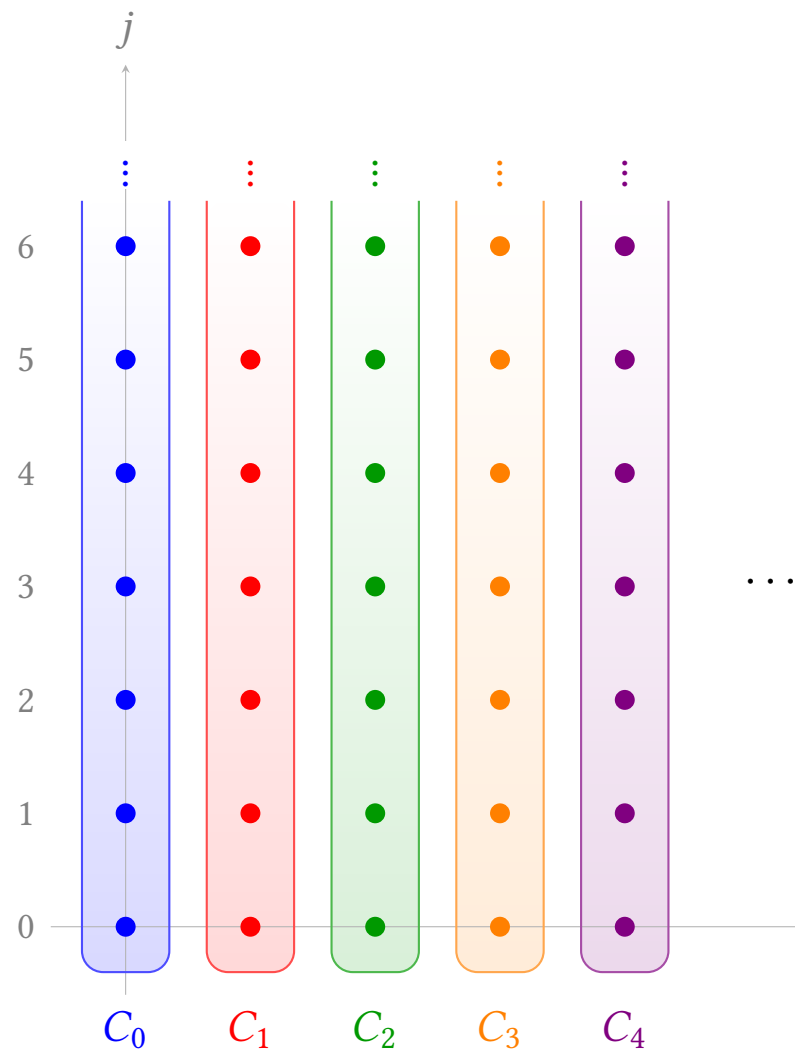
Remarque : Dans la plupart des cas on travaillera avec $I = \mathbb{N}^2$. Les partitions utilisées seront souvent

- Les « lignes » : Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $L_j = \{(i, j) \mid i \in \mathbb{N}\}$. On a $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} L_j$.

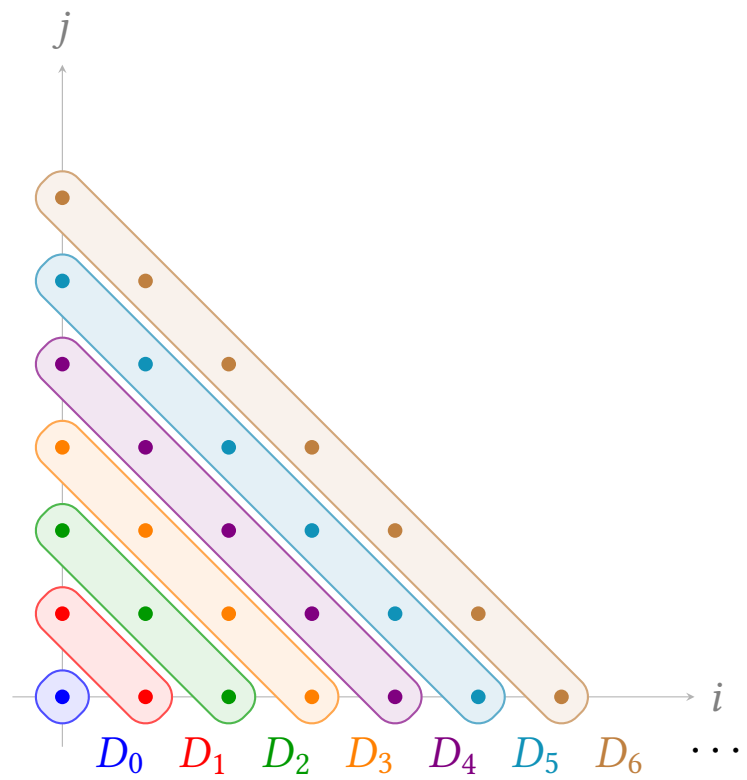




— Les « colonnes » : Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on pose $C_i = \{(i, j) \mid j \in \mathbf{N}\}$. On a $\mathbf{N}^2 = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}} C_i$.



- Les « diagonales » : Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose $D_k = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 \mid i + j = k\}$.



2.3 Familles sommables de nombres complexes

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe aux familles de réels non nécessairement positifs ou de nombres complexes. Les idées développées sont proches de celles des séries absolument convergente et des fonctions intégrables.

Définition 6.25

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I . Elle est dite sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable, c'est-à-dire si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables indexées par I .

ATTENTION

Quand on travaille avec des réels positifs, on peut toujours donner un sens à $\sum_{i \in I} u_i$ que la famille soit sommable ou non. Dans le cas des nombres réels qui ne sont pas de signe constant ou dans le cas des nombres complexes ce n'est plus le cas. Il **ne faut pas** écrire $\sum_{i \in I} u_i$ avant d'avoir montré la sommabilité de la famille.

Proposition-Définition 6.26

1. Soit $(u_k)_{k \in I}$ une famille sommable de nombres réels indexée par I . Les familles $(u_k^+)_{k \in I}$ et $(u_k^-)_{k \in I}$ sont sommables. On pose alors

$$\sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I} u_k^+ - \sum_{k \in I} u_k^-$$

2. Soit $(u_k)_{k \in I}$ une famille sommable de nombres complexes indexée par I . Les familles $(\operatorname{Re}(u_k))_{k \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_k))_{k \in I}$ sont sommables. On pose alors

$$\sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(u_k)$$

Rappel : Pour tout réel x on appelle partie positive (resp. négative) et on note x^+ (resp. x^-) les réels positifs :

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

On a ainsi $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Démonstration :

Proposition 6.27 (Invariance par permutation des indices)

Soit (u_i) une famille de nombres complexes indexée par I . Soit J un ensemble en bijection avec I et φ une bijection de J dans I . Pour tout $j \in J$ on pose $v_j = u_{\varphi(j)}$.

1. La famille $(v_j)_{j \in J}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i \in I}$ l'est.
2. Dans ce cas,

$$\sum_{j \in J} v_j = \sum_{i \in I} u_i.$$

Démonstration : On a déjà traité le cas des réels positifs. Montrons que l'on peut s'y ramener dans le cas général

1. Pour la sommabilité

$$(v_j)_{j \in J} \text{ sommable} \iff (|v_j|)_{j \in J} \text{ sommable} \iff (|u_i|)_{i \in I} \text{ sommable} \iff (u_i)_{i \in I} \text{ sommable}$$

2. Dans le cas où les familles sont sommables et que ce sont des familles nombres réels,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^- = \sum_{j \in J} v_j^+ - \sum_{j \in J} v_j^- = \sum_{j \in J} v_j$$

Le cas des nombres complexes est similaire.

□

Proposition 6.28 (Sommabilité d'une sous-famille)

Soit (u_i) une famille de nombres complexes indexée par I . Soit $J \subset I$ une partie de I . Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable alors $(u_i)_{i \in J}$ aussi.

Démonstration : On a déjà traité le cas des réels positifs. Le cas général s'y ramène

$$(u_i)_{i \in I} \text{ sommable} \iff (|u_i|)_{i \in I} \text{ sommable} \Rightarrow (|u_i|)_{i \in J} \text{ sommable} \iff (u_i)_{i \in J} \text{ sommable}$$

□

Proposition 6.29 (Sommabilité par majoration)

Soit (u_i) une famille de nombres complexes indexée par I . Soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels positifs. On suppose que pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$ alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Démonstration : Il suffit de voir que

$$(v_i)_{i \in I} \text{ sommable} \Rightarrow (|u_i|)_{i \in I} \text{ sommable} \Rightarrow (u_i)_{i \in I} \text{ sommable}$$

□

Proposition 6.30 (Lien avec les séries)

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{i \geq 0} u_i$ est **absolument convergente**. Dans ce cas

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

Démonstration :

On a

$$(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ sommable} \iff (|u_i|)_{i \in \mathbb{N}} \text{ sommable} \iff \sum_{i \geq 0} |u_i| \text{ converge} \iff \sum_{i \geq 0} u_i \text{ converge absolument}$$

Dans ce cas vérifions que la formule sur les sommes se déduit de celle dans le cas des réels positifs.

— Cas des réels :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^- = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i^+ - \sum_{i=0}^{+\infty} u_i^- = \sum_{i=0}^{+\infty} (u_i^+ - u_i^-) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

— Cas des complexes :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} (\operatorname{Re}(u_i) + i \operatorname{Im}(u_i)) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

Corollaire 6.31 (Propriétés)

1. (Linéarité de la somme) Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles sommables. Soit (λ, μ) deux scalaires. La famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$

2. (Inégalité triangulaire) Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable,

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$$

Démonstration :

1. On sait que comme $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont sommables les supports Z_u et Z_v de ces familles sont au plus dénombrables. On peut alors remplacer I par $Z_u \cup Z_v$ qui est encore au plus dénombrable. Le cas où I est fini étant évident, on peut supposer que I est dénombrable.

Soit φ une bijection entre $\mathbb{N}$ et I . On considère $x_n = u_{\varphi(n)}$ et $y_n = v_{\varphi(n)}$.

On a alors

$$\begin{aligned}(u_i)_{i \in I} \text{ et } (v_i)_{i \in I} \text{ sommables} &\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sommables} \\ &\Rightarrow \sum_{n \geq 0} x_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} y_n \text{ absolument convergentes} \\ &\Rightarrow \sum_{n \geq 0} (\lambda x_n + \mu y_n) \text{ absolument convergente} \\ &\Rightarrow (\lambda x_n + \mu y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sommable} \\ &\Rightarrow (\lambda u_i + \mu v_j)_{i \in I} \text{ sommable}\end{aligned}$$

De plus

$$\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda x_n + \mu y_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$

2. En exercice.

□

Proposition 6.32 (Théorème d'approximation)

Soit $(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \subset I$ tel que pour tout $F \subset I$ contenant J ,

$$\left| \sum_{i \in F} u_i - \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \varepsilon$$

Démonstration : Traitons le cas où pour tout $i \in I$, $u_i \in \mathbb{R}$.

Théorème 6.33 (Somme par paquets - cas complexe)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indexée sur un ensemble I . Soit $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I . La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si

— Pour tout $j \in J$, la famille $(u_i)_{i \in I_j}$ est sommable.

— La famille $\left(\sum_{i \in I_j} |u_i| \right)_{j \in J}$ est sommable.

Dans ce cas,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Démonstration : (Hors programme)

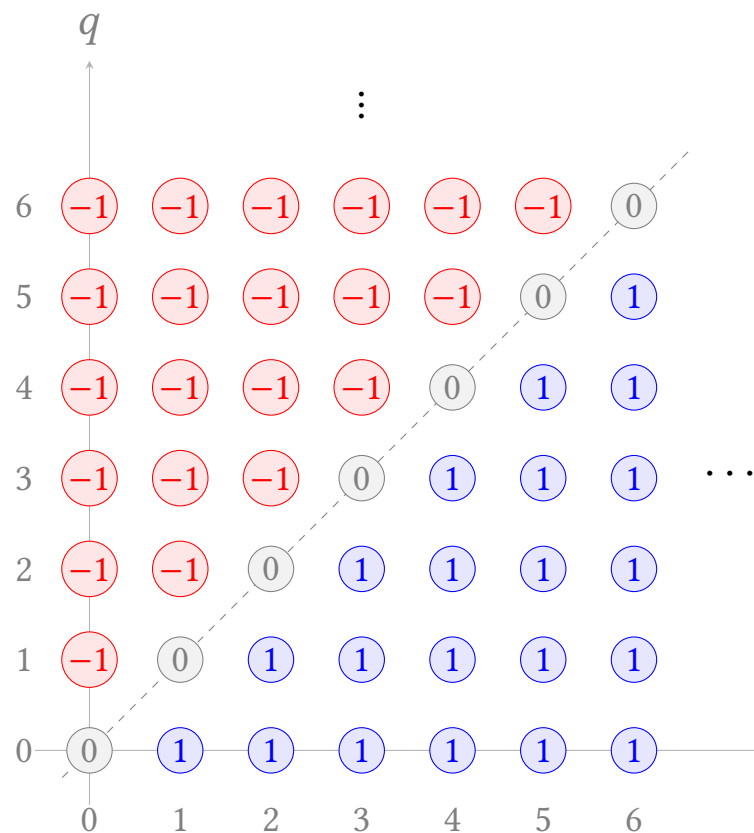
ATTENTION

Il est important de noter que c'est la famille $\left(\sum_{i \in I_j} |u_i| \right)_{j \in J}$ qui doit être sommable et pas juste

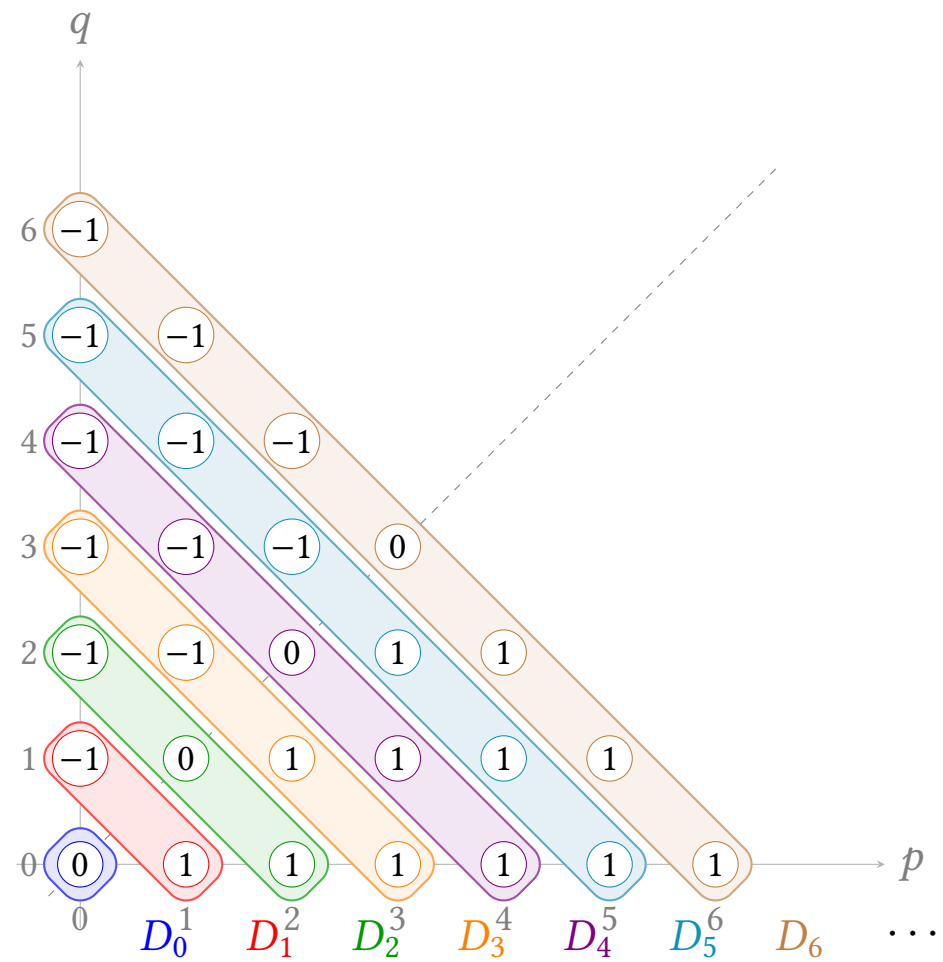
$\left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J}$. Voir exemple 1 ci-dessous

Exemples :

- On étudie la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ où pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $u_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } p > q \\ -1 & \text{si } p < q \\ 0 & \text{si } p = q \end{cases}$.



On considère les paquets $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2, p + q = n\}$.



2. On étudie la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbf{N}^2}$ où pour $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, $u_{p,q} = \frac{(-1)^p}{p! q!}$.

On veut utiliser les paquets $D_n = \{(p, q) \in \mathbf{N}^2, p + q = n\}$. On voit aisément que $\mathbf{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbf{N}} D_n$.

Corollaire 6.34 (Théorème de Fubini)

Soit A, B deux ensembles et $I = A \times B$. Soit $(u_{a,b})_{(a,b) \in I}$ une famille indexée par I .

La famille $(u_{a,b})_{(a,b) \in I}$ est sommable si et seulement si

- Pour tout $a \in A$, la famille $(u_{a,b})_{b \in B}$ est sommable.
- La famille $\left(\sum_{b \in B} |u_{a,b}| \right)_{a \in A}$ est sommable

Dans ce cas

$$\sum_{a \in A} \left(\sum_{b \in B} u_{a,b} \right) = \sum_{b \in B} \left(\sum_{a \in A} u_{a,b} \right) = \sum_{(a,b) \in A \times B} u_{a,b}$$

Corollaire 6.35 (Théorème de Fubini pour $I = \mathbb{N}^2$)

Soit $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}^2$. Elle est sommable si et seulement si

- Pour tout entier n , la famille la série $\sum_{m \geq 0} u_{n,m}$ converge absolument.
- La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{n,m}| \right)$ converge.

Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right).$$

Corollaire 6.36

Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles supposées sommables. La famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j$$

Démonstration : On applique le théorème de sommations par paquets à la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ en considérant, pour $i \in I$ le paquet $C_i = \{(i, j), j \in J\}$.

Dans $[0, +\infty]$

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} |a_i b_j| \underset{\text{som. paquets positive}}{=} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |a_i| \times |b_j| = \left(\sum_{i \in I} |a_i| \right) \times \left(\sum_{j \in J} |b_j| \right) < +\infty$$

La famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est donc sommable. On peut reprendre le calcul sans les valeurs absolues / modules

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j \underset{\text{som. paquets}}{=} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i \times b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$$

□

2.4 Produit de Cauchy

Définition 6.37

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries numériques (réelles ou complexes). On appelle produit de Cauchy la série $\sum_{p \geq 0} c_p$ où

$$\forall p \in \mathbb{N}, c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m = \sum_{n=0}^p a_n b_{p-n} = \sum_{m=0}^p a_{p-m} b_m.$$

Matheux (Augustin Louis Cauchy : 1789 - 1857)



Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Il est l'un des mathématiciens les plus prolifiques de l'histoire. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations sont précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

Son œuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au XIXe siècle, mais le fait qu'il publie ses résultats dès leur découverte sans y appliquer toute la rigueur souhaitée et la négligence dont il fait preuve concernant les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel entachent son prestige.

Théorème 6.38

Si les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ convergent **absolument** alors la série $\sum_{p \geq 0} c_p$ converge absolument et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Démonstration : Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ étant absolument convergentes, les familles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont sommables et donc la famille $(a_n b_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

De plus

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_n b_m = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m \right).$$

Il suffit maintenant de découper selon les paquets $D_p = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2, n + m = p\}$. On a alors

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_n b_m = \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{(n,m) \in D_p} a_n b_m \right) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p$$

□

Remarque : Ce résultat sera utilisé pour démontrer le produit de Cauchy de deux séries entières.

Exemples :

1. Pour $x, y \in \mathbb{C}$, on prend $a_n = \frac{x^n}{n!}$ et $b_n = \frac{y^n}{n!}$. Ces séries sont absolument convergentes.

2. Soit $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| < 1$.

On prend $a_n = b_n = x^n$. Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont absolument convergentes car $|x| < 1$.

3. Soit $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.