

Interrogation 4 – Corrigé

Convergence dominée

MP2 – 2026/2027

A. Limites d'intégrales

8 pts

1. $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$

On pose $f_n(t) = (\cos t)^n$, continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- **Convergence simple.** Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leq \cos t < 1$ donc $f_n(t) \rightarrow 0$; de plus $f_n(0) = 1$. La limite simple $f = \mathbf{1}_{\{0\}}$ est continue par morceaux.
- **Domination.** $|f_n| \leq 1$, fonction intégrable sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Par convergence dominée, $u_n \rightarrow \int_0^{\pi/2} f = 0$.

2. $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{2e^{-t}}{1 + e^{-nt}} dt$

On pose $f_n(t) = \frac{2e^{-t}}{1 + e^{-nt}}$, continue sur $[0, +\infty[$.

- **Convergence simple.** Pour $t > 0$, $e^{-nt} \rightarrow 0$ donc $f_n(t) \rightarrow 2e^{-t}$; et $f_n(0) = 1$. La limite simple f est continue par morceaux (elle ne diffère de $t \mapsto 2e^{-t}$ qu'en 0).
- **Domination.** Comme $1 + e^{-nt} \geq 1$, on a $0 \leq f_n(t) \leq 2e^{-t}$, fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par convergence dominée, $v_n \rightarrow \int_0^{+\infty} 2e^{-t} dt = 2$.

3. $w_n = \int_0^n t^3 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$

Il faut se ramener à un intervalle fixe : $w_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ avec

$$f_n(t) = t^3 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, n]}(t),$$

continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

- **Convergence simple.** Soit $t \geq 0$ fixé. Pour $n > t$,

$$f_n(t) = t^3 \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -t + o(1),$$

donc $f_n(t) \rightarrow t^3 e^{-t}$.

- **Domination.** Pour $0 \leq t \leq n$, on a $0 \leq 1 - \frac{t}{n} \leq e^{-t/n}$ (car $1 - x \leq e^{-x}$), donc $0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$ (le cas $t > n$ étant trivial),

$$0 \leq f_n(t) \leq t^3 e^{-t},$$

fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ car $t^3 e^{-t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Par convergence dominée, $w_n \rightarrow \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$. Par intégration par parties (le crochet est nul),

pour $k \geq 1$, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$, d'où

$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt = 3 \times 2 \times 1 \times \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 6.$$

4. $x_n = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^n} dt$

On pose $f_n(t) = \frac{\ln t}{1+t^n}$, continue sur $]0, 1]$.

- **Convergence simple.** Pour $t \in]0, 1[$, $t^n \rightarrow 0$ donc $f_n(t) \rightarrow \ln t$; et $f_n(1) = 0 = \ln 1$. La limite simple est $f : t \mapsto \ln t$, continue sur $]0, 1]$.
- **Domination.** Comme $1+t^n \geq 1$, $|f_n(t)| \leq |\ln t|$. Or $\ln t = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ appartient à $L^1([0, 1])$, donc $t \mapsto |\ln t|$ aussi.

Par convergence dominée, $x_n \rightarrow \int_0^1 \ln t dt = \left[t \ln t - t\right]_0^1 = -1$.

B. Calcul par intégration terme à terme

6 pts

5–6. Calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

Développement en série. Pour $t > 0$, $0 < e^{-t} < 1$ donc

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt}.$$

On pose $f_n(t) = t e^{-nt}$ pour $n \geq 1$.

Hypothèses.

- Les f_n sont continues sur $]0, +\infty[$ et la série $\sum f_n$ converge simplement vers $S : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$, continue sur $]0, +\infty[$.
- Les f_n sont positives et intégrables puisque pour $n \geq 1$, $t e^{-nt} = o\left(1/t^2\right)$ et que $(t \mapsto \frac{1}{t^2}) \in L^1([1, +\infty[)$.

Par intégration terme à terme dans $[0, +\infty[$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt \right)$$

De plus, par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \left[-\frac{t e^{-nt}}{n} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}.$$

Finalement, S est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'où $a = 1$ et $b = 6$.

D. Question rédigée

5 pts

7. Montrer que $K = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge et que $K = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Développement en série. Pour $t \in]0, 1[$, on a $t^2 < 1$ donc

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \quad \text{d'où} \quad \frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t), \quad f_n(t) = (-1)^n t^{2n} \ln t.$$

Une intégrale intermédiaire. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties,

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = -\int_0^1 t^{2n} \ln t dt = -\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \ln t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt$$

car le crochet converge puisque $t^{2n+1} \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$. On en déduit que

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Hypothèses du théorème.

- Les f_n sont continues et intégrables sur $]0, 1[$
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$, continue sur $]0, 1[$.
- D'après ce qui précède, la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n|$ converge car $\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$.

Conclusion. Le théorème d'intégration terme à terme montre que $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ converge et que

$$K = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{(2n+1)^2} \right) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$