

Interrogation 5 – Corrigé

Réduction

MP2 – 2026/2027

A. Calculs

6 pts

1–3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$: coefficients a, b, c de $\chi_A = X^3 + aX^2 + bX + c$.

En développant par rapport à la première ligne,

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & 4 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = X \cdot \begin{vmatrix} X & 0 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = X^2(X-3) + 4,$$

soit $\chi_A = X^3 - 3X^2 + 4$. Donc $a = -3$, $b = 0$ et $c = 4$.

4. Multiplicité de la valeur propre 2 dans χ_A .

Le nombre 2 est racine de χ_A ($8 - 12 + 4 = 0$). On factorise : -1 est aussi racine ($-1 - 3 + 4 = 0$) et

$$X^3 - 3X^2 + 4 = (X + 1)(X^2 - 4X + 4) = (X + 1)(X - 2)^2.$$

La multiplicité de 2 comme racine de χ_A vaut **2**.

5. Dimension de $E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$.

Soit $(x, y, z)^\top \in \text{Ker}(A - 2I_3)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$$

Ainsi $E_2(A) = \text{Vect}((-2, -1, 1)^\top)$ et $\dim E_2 = 1$.

B. Vrai ou faux

8 pts

6. $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\chi_A = X^2 + 1$: A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

NON. Une matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Ici $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle : il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

7. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\chi_A = X^3 - X^2 - X + 1$: A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

OUI. On factorise :

$$X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X - 1) - (X - 1) = (X - 1)(X^2 - 1) = (X - 1)^2(X + 1),$$

qui est scindé sur $\mathbb{R}$. Donc A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, semblable à une matrice triangulaire dont la diagonale est $(1, 1, -1)$ à l'ordre près.

8. Affirmations sur $u \in \mathcal{L}(E)$, E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

- **VRAI** — C'est du cours
- **FAUX** — L'identité id_E a pour polynôme caractéristique $(X - 1)^n$, scindé, mais n'est pas nilpotente ($\text{id}^p = \text{id} \neq 0$). Être trigonalisable ne suffit pas pour être nilpotent.
- **FAUX** — Les matrices 0 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont le même polynôme caractéristique X^2 , mais ne sont pas semblables : la seule matrice semblable à 0 est 0 .
- **VRAI** — Comme E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, χ_u est scindé ; sa seule racine étant 0 , on a $\chi_u = X^n$ et u nilpotent

C. Question rédigée

5 pts

9. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

La matrice A est semblable à une matrice T triangulaire supérieure ayant les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale.

a. Déterminant et traces des puissances. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PT^kP^{-1}$. La matrice T^k est triangulaire supérieure, de diagonale $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ (le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur, avec pour diagonale le produit des diagonales). Par invariance de la trace par similitude,

$$\text{tr}(A^k) = \text{tr}(T^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

b. Cas nilpotent. Si A est nilpotent alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et, d'après la question a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n 0^k = 0.$$