Exercice I

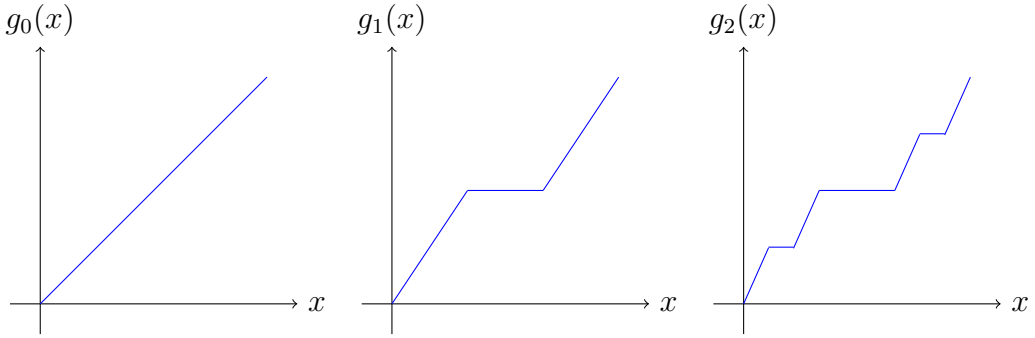
1) Soit $f \in H$. Commençons par remarquer que si $x \in [0, \frac{1}{3}[$, $3x \in [0,1]$ et que si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, $3x - 2 \in [0,1]$ donc $T(f)$ est définie sur $[0,1]$.
De plus, $T(f)(0) = \frac{1}{2}f(0) = 0$ et $T(f)(1) = \frac{1}{2}(1 + f(1)) = 1$.
Ensuite, $T(f)$ est continue d'après les théorèmes généraux sur $[0,1] \setminus \{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\}$. Pour finir, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^-} T(f)(x) = \frac{1}{2}$ car $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} T(f)(x) = \frac{1}{2}$ car $f(0) = 0$.
On a bien montré que $T(f) \in H$.

2) Soit $f, g \in H^2$. Soit $x \in [0,1]$.
— Si $x < \frac{1}{3}$, $|T(f)(x) - T(g)(x)| = \frac{1}{2}|f(3x) - g(3x)| \leqslant \frac{1}{2}||f - g||_\infty$.
— Si $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $|T(f)(x) - T(g)(x)| = 0 \leqslant \frac{1}{2}||f - g||_\infty$.
— Si $x > \frac{2}{3}$,

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| = \frac{1}{2}|1 + f(3x-2) - 1 - g(3x-2)| = \frac{1}{2}|f(3x-2) - g(3x-2)| \leqslant \frac{1}{2}||f-g||_\infty$$

On en déduit que dans tous les cas, $|T(f)(x) - T(g)(x)| \leqslant \frac{1}{2}||f - g||_\infty$. Cela implique que $||T(f) - T(g)||_\infty \leqslant \frac{1}{2}||f - g||_\infty$.

3) Voici les graphes des fonctions g_0, g_1 et g_2



4) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, par téléscopage, $g_n(x) = g_0(x) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} g_{k+1}(x) - g_k(x)$.
Par la question 1) et par récurrence, les fonctions g_n sont toutes dans H.
En utilisant la question 2) on voit que pour tout entier n,

$$||g_{n+2} - g_{n+1}||_\infty = ||T(g_{n+1}) - T(g_n)||_\infty \leqslant \frac{1}{2}||g_{n+1} - g_n||_\infty$$

Par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, ||g_{n+1} - g_n||_\infty \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n ||g_1 - g_0||_\infty$$

Commé la série géométrique de raison $1/2$ converge, on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0}(g_{n+1} - g_n)$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,1]$, ce qui signifie que la suite de fonctions $(g_n - g_0)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément, donc la suite $(g_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément.

5) On remarque pour commencer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(0) = 0$ et $g_n(1) = 1$ car $g_n \in H$. Par passage à la limite, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

Les fonctions g_n sont toutes continues car appartiennent à H.

Comme la suite (g_n) converge uniformément vers g, la fonction g est continue.

6) On a $K_1 = h_0(K_0) \cup h_1(K_0) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. On a alors

$$K_2 = h_0(K_1) \cup h_1(K_1) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

$K_1 \subset K_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n+1} \subset K_n$. Alors

$$K_{n+2} = h_0(K_{n+1}) \cup h_1(K_{n+1}) \subset h_0(K_n) \cup h_1(K_n) = K_{n+1}$$

Ainsi par récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad K_{n+1} \subset K_n$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est réunion de 2^n segments deux à deux disjoints et tous de longueur 3^{-n}.

K_0 est un segment de longueur 1 donc est réunion de 2^0 segments 2 à 2 disjoints de longueurs 3^{-0}.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que K_n soit réunion de 2^n segments tous de longueur 3^{-n}.

Comme h_0 est continue, $h_0(K_n)$ est réunion de 2^n segments. Comme h_0 est injective, ces segments sont 2 à 2 disjoints. Comme h_0 est une homothétie de rapport $1/3$, ces segments sont tous de longueur $3^{-(n+1)}$. De plus ils sont tous inclus dans $[0, \frac{1}{3}]$.

De même $h_1(K_n)$ est réunion de 2^n segments 2 à 2 disjoints, tous de longueur $3^{-(n+1)}$ et inclus dans $[\frac{2}{3}, 1]$.

Ainsi, puisque $[0, \frac{1}{3}] \cap [\frac{2}{3}, 1] = \emptyset$, K_{n+1} est réunion de 2^{n+1} segments 2 à 2 disjoints et tous de longueur $3^{-(n+1)}$.

7) Soit $x \in U$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \notin K_n$.

D'après la question précédente, K_n s'écrit

$$[a_1, b_1] \sqcup \ldots \sqcup [a_{2^n}, b_{2^n}]$$

avec $0 = a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_{2^n} = 1$, car par récurrence on a $0 \in K_n$ et $1 \in K_n$.

Posons $i_0 = \max\{i \in [\![1, 2^n[\![\mid b_i < x\}$, qui est bien défini comme minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}$ puisque $x > b_1$ et majorée par $2^n - 1$, on a $b_{i_0} < x < a_{i_0+1}$ car sinon $x \in [a_{i_0+1}, b_{i_0+1}] \subset K_n$.

Posant $\varepsilon = \min(x - b_{i_0}, a_{i_0+1} - x)$ on a $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap K_n = \emptyset$ et $\varepsilon > 0$.

8) Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad g_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \mathbb{1}_{K_n}(t)dt$$

La propriété est vraie au rang 0 car

$$\forall x \in [0,1] \quad \left(\frac{3}{2}\right)^0 \int_0^x \mathbb{1}_{K_0}(t)dt = \int_0^x dt = x = g_0(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n.

Si $x \leqslant \frac{1}{3}$ alors

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2} g_n(3x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^{3x} \mathbb{1}_{K_n}(t)dt$$

et par le changement de variable $s = t/3,\ dt = 3ds$ on obtient

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2} g_n(3x) = \frac{3^n}{2^{n+1}} \int_0^{x} \mathbb{1}_{K_n}(3s)3ds = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \int_0^{x} \mathbb{1}_{K_{n+1}}(s)ds$$

car pour $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$ on a $s \in K_{n+1} \Leftrightarrow s \in h_0(K_n) \Leftrightarrow 3s \in K_n$.
Si $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$,

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2} = g_{n+1}(1/3) = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \int_0^{1/3} \mathbb{1}_{K_{n+1}}(t)dt = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \int_0^{x} \mathbb{1}_{K_{n+1}}(t)dt$$

car $K_{n+1} \cap]\frac{1}{3}, x[\subset K_{n+1} \cap]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[= \emptyset$.
Si $x \in]\frac{2}{3}, 1]$,

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(x) &= \frac{1}{2}(1 + g_n(3x-2)) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{3^n}{2^n} \int_0^{3x-2} \mathbb{1}_{K_n}(t)dt \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{3^n}{2^n} \int_{\frac{2}{3}}^{x} \mathbb{1}_{K_n}(3s-2)3ds \\
&\qquad \text{par le changement de variable } t = 3s-2,\ dt = 3ds \\
&= \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \int_0^{x} \mathbb{1}_{K_{n+1}}(s)ds
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{2} = g_{n+1}(2/3) = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \int_0^{2/3} \mathbb{1}_{K_{n+1}}(s)ds$ et pour $\frac{2}{3} < s < x \leqslant 1$, on a : $s \in K_{n+1} \Leftrightarrow s \in h_1(K_n) \Leftrightarrow 3s - 2 \in K_n$.

9) Soit $x \in U$.
Par la question 7, il existe $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $I =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ soit disjoint de K_n, et donc de tous les K_p pour $p \geqslant n$ car alors $K_p \subset K_n$ par la question 6.
Par la question 8 les fonctions g_p sont constantes sur I pour tout $p \geqslant n$. Comme la suite (g_p) converge uniformément donc simplement vers g, la fonction g est constante sur I. Donc elle est dérivable en x avec une dérivée nulle.

Exercice II

1) Pour tout $t \in]-1, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(t)| \leqslant |t|^n$ donc la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n(t)$ converge absolument donc converge. Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1, 1[$.

2) Soit $a \in]0, 1[$.
   a) Pour tout $t \in]-1, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n'(t) = t^{n-1}\sin(nt) + t^n \cos(nt)$$

$$|f_n'(t)| \leqslant |t^{n-1}\sin(nt)| + |t^n \cos(nt)| \leqslant 2a^{n-1}$$

   Donc $||f_n'||_{\infty,[-a,a]} \leqslant 2a^{n-1}$.
   Donc la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$.

b) Les fonctions f_n sont de classe $\mathbb{C}^1$, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ et la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$. Donc f est de classe $\mathbb{C}^1$ et pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\sin(nt) + t^n\cos(nt) \\ &= \mathfrak{Im}(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}e^{int}) + \mathfrak{Re}(\sum_{n=1}^{\infty} t^n e^{int}) \\ &= \mathfrak{Im}\frac{t^0 e^{it}}{1-te^{it}} + \mathfrak{Re}\frac{t^1 e^{it}}{1-te^{it}} \\ &= \frac{\mathfrak{Im}(e^{it}(1-te^{-it})) + \mathfrak{Re}(te^{it}(1-te^{-it}))}{(1-te^{it})(1-te^{-it})} \\ f'(t) &= \boxed{\frac{\sin t + t\cos t - t^2}{1-2t\cos t + t^2}} \end{aligned}$$

c) Soit $g : t \mapsto \arctan\left(\frac{t\sin t}{1-t\cos t}\right)$.
Pour tout $t \in]-1,1|$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{(\sin t + t\cos t)(1-t\cos t) - t\sin t(-\cos t + t\sin t)}{(1-t\cos t)^2} \times \frac{1}{1+\frac{t^2\sin^2 t}{(1-t\cos t)^2}} \\ &= \frac{\sin t - t\sin t\cos t + t\cos t - t^2\cos^2 t + t\sin t\cos t - t^2\sin^2 t}{1-2t\cos t + t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} \\ &= f'(t) \end{aligned}$$

et $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 = g(0)$.
Donc $\boxed{\forall t \in]-1,1[\quad f(t) = g(t)}$.

3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} |A_n(t)| &= \left|\mathfrak{Im}\frac{te^i t(1-t^n e^{int})}{1-te^{it}}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{te^i t(1-t^n e^{int})}{1-te^{it}}\right| \\ &\leqslant \frac{2}{|1-te^{it}|} \end{aligned}$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{2}{|1-te^{it}|}$ est continue sur le segment $[-1,1]$ (le dénominateur ne s'annule jamais car si $|t| < 1$ alors $|te^{it}| < 1$, et si $|t| = 1$ alors $te^{it} = \pm e^{\pm i} \neq 1$), donc elle est majorée. Notant M sa borne supérieure (qu'elle atteint), on a :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } t \in [-1,1],\ |A_n(t)| \leqslant M}$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \sin kt}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(t)}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k-1}(t)}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(t)}{k} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A_i(t)}{i+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} A_k(t) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{A_n(t)}{n} \quad \text{car } A_0(t) = 0 \\
&= \boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}}
\end{aligned}$$

c) Posons $g_k : t \in [-1,1] \mapsto \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$

On a $\forall k \geqslant 1 \quad ||g_k||_{\infty,[-1,1]} \leqslant \frac{M}{k(k+1)} \leqslant \frac{M}{k^2}$. Donc $\boxed{\text{la série } \sum g_k \text{ converge normalement}}$ et donc uniformément sur $[-1,1]$.

Par ailleurs la **suite** de fonctions (A_n/n) converge uniformément vers la fonction nulle car $||A_n/n||_{\infty,[-1,1]} \leqslant M/n$.

Donc la suite de fonctions $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$ converge unirformément sur $[-1,1]$. Ainsi la série de fonctions $\boxed{\sum_{k \geqslant 1} f_k \text{ converge uniformément sur } [-1,1]}$. De plus pour tout $t \in [-1,1]$

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) + 0}$$

(bien remarquer le fait suivant : les deux séries $\sum f_k$ et $\sum g_k$ convergent uniformément et ont même somme, mais on a convergence normale que pour la série $\sum g_k$).

Par continuité des f_k (ou des g_k) et convergence uniforme, $\boxed{f \text{ est continue sur } [-1,1]}$.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = f(1)$

Comme f est continue en 1,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} &= \lim_{1^-} f = \lim_{t \to 1^-} \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t} \\
&= \arctan \frac{\sin 1}{1 - \cos 1} \quad \text{car arctan est continue} \\
&= \arctan \frac{2 \sin(1/2) \cos(1/2)}{2 \sin^2(1/2)} = \arctan \operatorname{cotan}(1/2) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan(\tan(1/2)) = \boxed{\frac{\pi - 1}{2}}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} &= \lim_{(-1)^+} (-f) = - \lim_{t \to (-1)^+} \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t} \\
&= -\arctan \frac{\sin 1}{1 + \cos 1} = \arctan \frac{2 \sin(1/2) \cos(1/2)}{2 \cos^2(1/2)} = \boxed{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$