## I - Calcul de $\sigma(1)$

1) On note $D$ l'ensemble de définition de $\sigma$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, on a par croissance comparée : $\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

donc la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k^2}$ diverge grossièrement d'où $D \subset [-1,1]$.

Par ailleurs, pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \mapsto \frac{x^k}{k^2}$ est continue sur l'intervalle $[-1,1]$

De plus $\forall x \in [-1,1]$, $\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}$, indépendant de $x$, et la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} \left(x \mapsto \frac{x^k}{k^2}\right)$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$. Ainsi $D = [-1,1]$ et $\sigma$ est continue sur $D$.

2) Soit $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On note $P = \alpha X^2 + \beta X$. Ainsi $P' = 2\alpha X + \beta$ et $P'' = 2\alpha$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégrations par parties successives (avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$), on a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi P(t)\cos(nt)\mathrm{d}t &= \left[P(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi P'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t \\ &= 0 + \left[P'(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi P''(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

or $\int_0^\pi P''(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\mathrm{d}t = \left[2\alpha\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$ et $\left[P'(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{(-1)^n P'(\pi) - P'(0)}{n^2}$
donc

$$\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n(2\pi\alpha+\beta) - \beta}{n^2}$$

En prenant $\beta = -1$ et $\alpha = \frac{1}{2\pi}$, on a $(-1)^n(2\pi\alpha+\beta) - \beta = 1$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}}$$

Soit $t \in ]0,\pi]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) &= \sum_{k=1}^{n} Re(e^{ikt}) \\
&= Re\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\Big) \\
&= Re\left(\mathrm{e}^{it}\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}\right) \quad \text{car } e^{it}\neq 1 \\
&= Re\left(\mathrm{e}^{it}\frac{e^{int/2}}{e^{it/2}}\frac{2i\sin(nt/2)}{2i\sin(t/2)}\right) \\
&= \frac{\cos((n+1)t/2)\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \\
&= \frac{\sin((2n+1)t/2-\sin(t/2)}{2\sin(t/2)} = \boxed{\frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

3) Soit $x>0$. Par intégration par parties et comme $\varphi$ et $t\mapsto \dfrac{-\cos(xt)}{x}$ sont $\mathcal{C}^1$ :

$$\begin{aligned}
0\leqslant\left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t\right| &= \left|\left[\varphi(t)\frac{-\cos(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=\pi}+\int_0^\pi \varphi'(t)\frac{\cos(xt)}{x}\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\frac{\varphi(0)-\varphi(\pi)\cos(\pi x)+\displaystyle\int_0^\pi \varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t}{x}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{x}\left(|\varphi(0)|+|\varphi(\pi)|+\int_0^\pi |\varphi'(t)|.|\cos(xt)|\mathrm{d}t\right) \\
&\leqslant \frac{1}{x}\left(2||\varphi||_\infty+\pi||\varphi'||_\infty\right) \\
&\qquad \text{car } \varphi \text{ et } \varphi' \text{ sont bornées car continues sur le segment } [0,\pi]
\end{aligned}$$

Par encadrement, $\left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t\right|$ tend vers 0 quand $x\to+\infty$ donc $\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t$ également.

4) $h$ est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et $h(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t}{t}=1$ donc posant $\tilde{h}(0)=1$ et $\tilde{h}(t)=h(t)$ si $t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\tilde{h}$ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
De plus pour tout $t\in]0,\pi/2]$,

$$\tilde{h}'(t)=\frac{\sin t-t\cos t}{\sin^2(t)}=\frac{t+o_{t\to0}(t^2)-t(1+o_{t\to0}(t)}{\sin^2(t)}\underset{t\to0}{\sim}\frac{o(t^2)}{t^2}\underset{t\to0}{\to}0$$

Par le théorème de limite de la dérivée, $\tilde{h}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ (avec $\tilde{h}'(0)=0$).
(les 5/2 pouvaient aussi dire que $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ se prolongeait en une fonction développable en série entière, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi/2]$, et ne s'annulant jamais. Son inverse est alors aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$).
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par la question 2), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}\mathrm{d}t=\int_0^\pi\varphi(t)\sin((2n+1)t/2)\mathrm{d}t$$

où $\varphi : t\mapsto(\frac{t}{2\pi}-1)\frac{t/2}{\sin(t/2)}=(\frac{t}{2\pi}-1)h(t/2)$ qui par le début de cette question se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
Par la question 3, et comme $\frac{2n+1}{2}\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$, on a :

$$\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

Ainsi

$$\sigma(1)=0-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{6\pi}-\frac{\pi^2}{2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\pi^2-3\pi^2}{6}=\boxed{\frac{\pi^2}{6}}$$

## II - Équivalents

5) Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto(\sin(t))^x=\exp(x\ln(\sin(t)))$ est continue sur $]0,\pi/2]$. Or

$$(\sin(t))^x\underset{t\to0^+}{\sim}t^x=\frac{1}{t^{-x}}$$

Par équivalence, la fonction $t\mapsto(\sin(t))^x$ est intégrable en 0 si et seulement si $t\mapsto\dfrac{1}{t^{-x}}$ l'est.
Ainsi $t\mapsto(\sin(t))^x$ est intégrable sur $]0,\pi/2]$ si et seulement si $-x<1$.
Comme $t\mapsto(\sin(t))^x$ est positive sur $]0,\pi/2]$, $\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est } I}$
Soit $x\in I$. On a $x+2\in I$.
On effectue alors une intégration par parties, sous réserve de convergence du bloc tout intégré :

$$f(x+2)=\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^{x+1}\sin(t)\ \mathrm{d}t=\left[-(\sin(t))^{x+1}\cos(t)\right]_{t\to0}^{t=\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(x+1)(\sin(t))^x\cos^2(t)\ \mathrm{d}t$$

Comme $x+1>0$, on a $[-(\sin(t))^{x+1}\cos(t)]_{t\to0}^{t=\pi/2}=0$ ce qui valide l'intégration par parties.
Comme $\cos^2=1-\sin^2$ et que $f(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^x\cos^2(t)\ \mathrm{d}t$ converge, alors on a

$$f(x+2)=(x+1)\left(\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^x\ \mathrm{d}t-\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^{x+2}\ \mathrm{d}t\right)=(x+1)f(x)-(x+1)f(x+2)$$

On a bien $\boxed{(x+1)f(x)=(x+2)f(x+2)}$ (1)

6) Soient $x, y \in I$ tels que $x \leqslant y$. Alors $\forall t \in ]0, \pi/2]$ $(\sin t)^x \geqslant (\sin t)^y$ car $0 < \sin t \leqslant 1$ et donc par croissance de l'intégrale, $f(x) \geqslant f(y)$
Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &= \int_0^{\pi/2} \exp((1-\lambda)x \ln(\sin t) + \lambda y \ln(\sin t)) \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{\pi/2} ((1-\lambda)\exp(x\ln(\sin t)) + \lambda \exp(y \ln(\sin t)))\, \mathrm{d}t \\ &\qquad \text{par convexité de l'exponentielle et croissance de l'intégrale} \\ &= (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est décroissante et convexe sur } I}$

7) Pour tout $t \in ]0, \pi/2]$ on a $(\sin t)^{x+2} \underset{x \to -1}{\to} \sin t$ et pour $x \in I$, $|(\sin(t))^{x+2}| = (\sin t)^{x+2} \leqslant \sin(t)$.
De plus la fonction sin est continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur $]0, \pi/2]$.
Donc par le théorème de convergence dominée, on a $f(x+2) \underset{x \to (-1)^+}{\to} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\, \mathrm{d}t = [-\cos]_0^{\pi/2} = 1$.
Par la relation (1) on a :

$$(x+1)f(x) \underset{x \to (-1)^+}{\to} (-1+2).1 = 1$$

et ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{x \to (-1)^+}{\sim} \frac{1}{x+1}}$$

8) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $n \in I$ et en multipliant par $f(n+1)$, on a : $(n+1)f(n)f(n+1) = (n+2)f(n+1)f(n+2)$
Ainsi la suite $((n+1)f(n)f(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
Comme $f(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $f(1) = [-\cos]_0^{\pi/2} = 1$. on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)f(n)f(n+1) = 1f(0)f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.
On peut conclure que $\boxed{f(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2(n+1)}}$
Comme $f$ est décroissante et positive, on a donc $f(n+1)^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2(n+1)} \leqslant f(n)^2$
d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\pi}{2(n+1)} \leqslant f(n)^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2n}$ ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant f(n) \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$
Soit $x \geqslant 1$. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$. On a donc $1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(\lfloor x \rfloor + 2)}} \leqslant f(\lfloor x \rfloor + 1) \leqslant f(x) \leqslant f(\lfloor x \rfloor) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor}}$$

Or $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x \rfloor + 2 \leqslant x + 2$
Quand $x \longrightarrow +\infty$, on a $x - 1 \sim x \sim x + 2$, d'où par encadrement d'équivalents (plus rigoureusement par encadrement de $\frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ et ...), on a $\lfloor x \rfloor \sim x$ et $\lfloor x \rfloor + 2 \sim x$.
À nouveau par encadrement d'équivalents, on a bien $\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}}$

## III - Développement en série

9) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est continue sur $]0, \pi/2]$.
Quand $t \longrightarrow 0^+$, on a $\sqrt{\sin(t)}(\ln(\sin(t)))^n \longrightarrow 0$ par croissance comparée.
or $\sin(t) \sim t$, donc $\sqrt{t}(\ln(\sin(t)))^n \longrightarrow 0$
D'où $(\ln(\sin(t)))^n = o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$ or $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable en 0.
Par comparaison à une fonction intégrable, $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.
Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale généralisée } D_n \text{ converge absolument donc converge}}$

Le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u\,;\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ nous donne : $D_1 = -\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi/2 - u))\mathrm{d}u$

On a bien $\boxed{D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t}$

10) En utilisant le résultat admis, on a $f'(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t = D_1$. Avec 9 et en effectuant le changement de variable $u = 2t\,;\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}t$, on a

$$2D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)\cos(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\ \mathrm{d}u - \frac{\ln(2)\pi}{2}$$

En effectuant le changement de variable $u = \pi - t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, on a :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\ \mathrm{d}u = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi - t))\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t = D_1$$

donc $2D_1 = \dfrac{2}{2}D_1 - \dfrac{\ln(2)\pi}{2}$. Ainsi $\boxed{f'(0) = D_1 = -\dfrac{\ln(2)\pi}{2}}$

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $t \mapsto -\ln(\sin(t))$ est strictement décroissante (par composition) et $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$
Par ailleurs, on a : $-\ln(\sin(\pi/2)) = 0$ et $\lim_{t\to 0^+}(-\ln(\sin(t))) = +\infty$.
Ainsi cette application induit une bijection de $]0, \pi/2]$ vers $[0, +\infty[$.
On effectue le changement de variable $u = -\ln(\sin(t))\,;\ \mathrm{d}u = \frac{-\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$
Or pour $t \in ]0, \pi/2[$, on a $\cos(t) > 0$ et donc

$$\frac{\sin(t)}{-\cos(t)} = -\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2u}}} = \frac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}$$

d'où $D_n = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} (-u)^n \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\mathrm{d}u$

ce qui donne $\boxed{(-1)^n D_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\ \mathrm{d}u}$

La fonction $u \mapsto u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable en $+\infty$ car $u^{n+1}\mathrm{e}^{-u} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(1/u^2\right)$ par croissance comparée.
Donc $u \mapsto u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[u^{n+1}(-\mathrm{e}^{-u})\right]_{u=0}^{u\to+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = (n+1)\int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

car le crochet converge et vaut 0 par croissances comparées.
Ainsi par récurrence immédiate

$$\int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = n!\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = n!\left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_{u=0}^{u\to+\infty} = n!$$

Or $(-1)^n D_n - \displaystyle\int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} u^n\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} - \frac{1}{\mathrm{e}^u}\right)\,\mathrm{d}u$. Ainsi

$$(-1)^n D_n - n! = \int_0^{+\infty} u^n\left(\frac{\mathrm{e}^u - \sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}{\mathrm{e}^u\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\right)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\frac{u^n}{\mathrm{e}^u\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}\left(\mathrm{e}^u+\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}\right)}\,\mathrm{d}u$$

Le calcul est licite car la quantité conjuguée : $\mathrm{e}^u + \sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1} \geqslant \sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1} > 0$, pour $u > 0$.
Par calcul dans $[0,+\infty]$ car les intégrandes sont positives, on a

$$|(-1)^n D_n - n!| \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{u^n}{\mathrm{e}^u\left(\mathrm{e}^{2u}-1\right)}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{u^n}{\mathrm{e}^u\left(2u\right)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{(n-1)!}{2}$$

On a utilisé l'inégalité de convexité $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^t - 1 \geqslant t > 0$ d'où

$$(-1)^n D_n - n! = \underset{n\to+\infty}{O}\left((n-1)!\right)$$

or $(n-1)! = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$ ainsi

$$(-1)^n D_n = n! + \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$$

On conclut : $\boxed{D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!}$

On pouvait également écrire $\int_0^\infty \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}du = \int_0^\delta + \int_\delta^{+\infty}$ et majorer la première intégrale en minorant l'exponentielle par convexité, et la seconde en minorant $e^{2u}-1$ par $ke^{2u}$ avec $k = 1-e^{-2\delta}$. Posant par exemple $\delta = \sqrt{n}$, on a $k\to 1$ et la première intégrale est $o(n!)$ par Stirling et on en déduit que $\int_0^\infty \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}du \sim \int_0^\infty u^n e^{-u}\mathrm{d}u = n!$.

12) Soit $x\in\,]-1,1[$. En utilisant le développement en série de l'exponentielle, on a

$$f(x) = \int_0^{\pi/2}\exp\left(x\ln(\sin(t))\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln(\sin(t))^n}{n!}x^n\mathrm{d}t$$

(i) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a vu en 9 que $t\mapsto\dfrac{\ln(\sin(t))^n}{n!}$ est continue et intégrable sur $]0,\pi/2]$.
Il en est donc de même pour $t\mapsto\dfrac{\ln(\sin(t))^n}{n!}x^n$ est continue et intégrable sur $]0,\pi/2]$.

(ii) La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(t\mapsto\frac{\ln(\sin(t))^n}{n!}x^n\right)$ converge simplement sur $]0,\pi/2]$ de somme $t\mapsto\exp\left(x\ln(\sin(t))\right)$
et $t\mapsto\exp\left(x\ln(\sin(t))\right)$ continue sur $]0,\pi/2]$

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(\sin(t))^n}{n!}x^n$ est de signe constant sur $]0, \pi/2]$ (celui de $(-x)^n$). Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \left|\frac{\ln(\sin(t))^n}{n!}x^n\right| \mathrm{d}t = \left|\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!}x^n \mathrm{d}t\right| = \frac{\left|\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))^n \mathrm{d}t\right|}{n!} \cdot |x^n| = \frac{|D_n|}{n!} \cdot |x|^n$$

Selon 11, on a $\dfrac{|D_n|}{n!} \cdot |x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$ et la série géométrique $\displaystyle\sum_n |x|^n$ converge absolument donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \left|\frac{\ln(\sin(t))^n}{n!}x^n\right| \mathrm{d}t < +\infty$$

Avec **(i), (ii)** et **(iii)**, le théorème d'intégration terme à terme s'applique ce qui nous donne l'existence des membres dans $\mathbb{R}$ et l'égalité

$$\forall x \in ]-1, 1[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!}x^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!}x^n$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est bien développable en série entière sur } ]-1, 1[}$

## IV - Calcul de $f''(0)$

13) On a $\forall x \in \mathbb{R},\ a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x) > 0$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $a^2 > 0$ et $b^2 > 0$.
Ainsi par composition $\boxed{\Psi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part on a

$$\Psi'(x) = \frac{2\,(b^2 - a^2)\cos(x)\sin(x)}{a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)} = \frac{(b^2 - a^2)\sin(2x)}{a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2(x)}$$

D'autre part, comme $a > 0$ et $b > 0$, on a $b - a < a + b$ et $a - b < a + b$ d'où $\rho$ est bien défini et

$$\left|\rho \mathrm{e}^{2ix}\right| = \left|\frac{b-a}{b+a}\right| \cdot \left|\mathrm{e}^{2ix}\right| = \max\left\{\frac{b-a}{b+a}, \frac{a-b}{b+a}\right\} < 1$$

Ainsi la série géométrique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \left(\rho \mathrm{e}^{2\imath x}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \mathrm{e}^{2\imath kx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\rho \mathrm{e}^{2\imath x}\right)^k = \frac{1}{1 - \rho\mathrm{e}^{2\imath x}} = \frac{1 - \rho\mathrm{e}^{-2\imath x}}{(1 - \rho\mathrm{e}^{2\imath x})\,(1 - \rho\mathrm{e}^{-2\imath x})}$$

En prenant les parties imaginaires puis en multipliant par $(b+a)^2 / (b+a)^2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) &= \frac{-\rho\sin(-2x)}{1 - \rho\left(\mathrm{e}^{\imath 2x} + \mathrm{e}^{-\imath 2x}\right) + \rho^2} = \frac{\rho\sin(2x)}{1 - 2\cos(2x)\rho + \rho^2} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)\sin(2x)}{(b+a)^2 - 2\cos(2x)(b-a)(b+a) + (b-a)^2}\end{aligned}$$

Comme $\sin(0) = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) = \frac{(b^2-a^2)\sin(2x)}{2a^2+2b^2-2(b^2-a^2)\left(1-2\sin^2(x)\right)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(b^2-a^2)\sin(2x)}{a^2+(b^2-a^2)\sin^2(x)}$$

On a bien $\boxed{\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)}$

14) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\Psi'$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a alors par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\Psi(x) - \Psi(0) = \int_0^x \Psi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k 4\sin(2kt)\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\right)\mathrm{d}t$$

en ayant posé pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : t \mapsto 4\rho^k \sin(2kt)$.
Or les $f_k$ sont continues sur $\mathbb{R}$ (i)
de plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f_k(t)| \leqslant 4\rho^k$ et la série géométrique $\sum \rho^k$ converge car $\rho \in ]-1,1[$.
donc la série $\sum_{k\geqslant 1} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ (ii).
Avec (i) et (ii), on peut intervertir somme de série et intégrale sur tout segment de $\mathbb{R}$ par le théorème de primitivation terme à terme. Ainsi

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \Psi(0) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t\right) = \ln(a^2) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{-4\rho^k\cos(2kt)}{2k}\right]_{t=0}^{t=x} \\ &= 2\ln(a) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\rho^k\cos(2kx)}{k} - \frac{\rho^k}{k}\right)\end{aligned}$$

Or avec le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $]-1,1[$, on a

$$\ln(1-\rho) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}(-\rho)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}$$

Ainsi

$$\Psi(x) = 2\ln(a) - 2\ln(1-\rho) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k\cos(2kx)}{k} = 2\ln\left(\frac{a}{1-\rho}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k\cos(2kx)}{k}$$

Or $\dfrac{a}{1-\rho} = \dfrac{a}{1-\frac{b-a}{a+b}} = \dfrac{a(a+b)}{(a+b)-(b-a)} = \dfrac{a+b}{2}$ d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k}$$

15) On a pour tout $x \in [0,\pi]$ :

$$\Psi(x) = 4\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 - 8\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k + 4\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(2kx)\cos(2(n-k)x)}{k(n-k)}\rho^n$$

En effet la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k$ converge absolument en majorant la valeur absolue du terme général par $|\rho|^k$ et en constatant que $|\rho|<1$ car $|b-a|\leqslant |b|+|a|=b+a$ et que l'inégalité est stricte car $a$ et $-b$ ne sont pas positivement colinéaires.
De plus pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $||x\mapsto \frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k||_\infty \leqslant |\rho|^k$ et $||\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(2kx)\cos(2(n-k)x)}{k(n-k)}\rho^n||_\infty \leqslant |\rho|^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}$.
De plus $\sum_{n=2}^{\infty}|\rho|^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}=(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\rho|^k}{k})^2<+\infty$.
Ainsi la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1}(x\mapsto\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k)$ converge normalement, ainsi que la série $\sum_{n\geqslant 2}(x\mapsto\sum_{k=1}^{n-1}\dots)$.
Donc par le théorème de primitivation terme à terme :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \Psi(x)^2\mathrm{d}x &= 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2-8\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^\pi\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k\mathrm{d}x\\ &\quad +4\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^\pi\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(2kx)\cos(2(n-k)x)}{k(n-k)}\rho^n\mathrm{d}x\\ &= 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2-8\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^\pi\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k\mathrm{d}x\\ &\quad +4\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi\frac{\cos(2kx)\cos(2(n-k)x)}{k(n-k)}\rho^n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or pour tous $k,l\in\mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^\pi\cos(2kx)\mathrm{d}x=[\frac{\sin(2kx)}{2k}]_0^\pi=0$$

et

$$\int_0^\pi\cos(2kx)\cos(2lx)\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{\cos(2(k+l)x+\cos(2(k-l)x)}{2}\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \text{si } k\neq l\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } k=l\end{cases}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi\frac{\cos(2kx)\cos(2(n-k)x)}{k(n-k)}\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \text{si } n\equiv 1[2]\\ \frac{\pi}{2(n/2)^2} & \text{si } n\equiv 0[2]\end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\Psi(x)^2\mathrm{d}x &= 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2-0+4\sum_{n\geqslant 2,\ n\equiv 0[2]}\frac{\pi}{2(n/2)^2}\rho^n\\ &= 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2k^2}\rho^{2k}\\ &= \boxed{4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2+2\pi\sigma(\rho^2)}\end{aligned}$$

N.B. : l'utilisation d'un produit de Cauchy est quelque peu artificielle. L'écriture par une somme indexée par un couple est plus naturelle mais nécessite d'étendre le théorème de primitivation terme à terme à de telles familles dont la famille des normes "infini" est sommable.

16) Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a : $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

On a donc $a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin^2(t) > 0$

Comme ln est continue, on a $\Psi_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\sin^2(t)\right)$

On a établi $\boxed{\text{la convergence simple}}$ de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $\boxed{t \mapsto 2\ln(\sin(t))}$

(i) Les fonctions $\Psi_n^2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues (donc c.p.m) sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

(ii) La suite d'applications $(\Psi_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergence simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $t \mapsto 4\ln^2(\sin(t))$.

(iii) La fonction $t \mapsto 4\ln^2(\sin(t))$ est continue (donc c.p.m.) sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

(iv) La suite $(a_n)$ est décroissante et positive de limite nulle et alors que la suite $(b_n) = (1 - a_n)$ est croissante et positive de limite 1.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_n^2 \leqslant a_1^2 = \dfrac{1}{4}$ et $b_1^2 = \dfrac{1}{4} \leqslant b_n^2 \leqslant 1$.

Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{1}{4}\sin^2(t) \leqslant a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \leqslant \frac{1}{4}\cos^2(t) + \sin^2(t) \leqslant \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

D'où par croissance de ln, on a

$$2\ln(\sin(t)) - 2\ln(2) \leqslant \Psi_n(t) \leqslant \ln(1) = 0$$

Ainsi on a l'hypothèse de domination :

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ \left|\Psi_n^2(t)\right| \leqslant 4\ln(2)^2 - 8\ln(2)\ln(\sin(t)) + 4\ln(\sin(t))^2$$

avec $t \longmapsto 4\ln(2)^2 - 8\ln(2)\ln(\sin(t)) + 4\ln(\sin(t))^2$ est continue et intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, selon 9

Avec **(i), (ii), (iii)** et **(iv)**, le théorème de convergence dominée s'applique. Cela donne l'existence des membres et l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \Psi_n(t)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 4\ln^2(\sin(t))\,\mathrm{d}t = 4D_2$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\forall x \in [0, \pi]$, $\Psi_n(\pi - x) = \Psi_n(x)$, on a en effectuant le changement de variable :

$$u = \pi - x\,;\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x$$

Ainsi avec 15, on a

$$\int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 \mathrm{d}x = 2\pi\left(\ln\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)\right)^2 + \pi\sigma\left(\rho_n^2\right) = 2\pi\ln(2)^2 + \pi\sigma\left((b_n - a_n)^2\right)$$

car $a_n + b_n = 1$ en ayant posé $\rho_n = \dfrac{b_n - a_n}{b_n + a_n} = b_n - a_n$ (on a bien $b_n > 0$ et $a_n > 0$).

Comme $\sigma$ est continue sur $[-1, 1]$ et $\sigma(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ selon la partie 3, on a $\sigma\left((b_n - a_n)^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi^2}{6}$.

D'où $4D_2 = 2\pi \ln(2)^2 + \dfrac{\pi^3}{6}$.

Avec la partie 2, on en déduit $\boxed{f''(0) = D_2 = \dfrac{\pi \ln(2)^2}{2} + \dfrac{\pi^3}{24}}$

## V - Convexité logarithmique

17) Soit $x > -1$.
La fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est continue et positive sur $]0, \pi/2]$ et non identiquement nulle car $(\sin(\pi/2))^x = 1$.
Ainsi $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t > 0$.
Donc $f$ est définie sur l'intervalle non trivial $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Alors $\ln \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I$ car $f$ l'est, selon 5.
Ainsi $(\ln \circ f)' = \dfrac{f'}{f}$ et $(\ln \circ f)'' = \dfrac{f''f - (f')^2}{f^2}$.

Pour établir que $f$ est ln-convexe sur $I$, il suffit alors de montrer que : $0 \leqslant \dfrac{f''f - (f')^2}{f^2}$

Soit $\varepsilon \in ]0, \pi/2[$. Les fonctions $t \mapsto (\sin(t))^{x/2}$ et $t \mapsto \ln(\sin(t)) (\sin(t))^{x/2}$ sont continues sur le segment $[\varepsilon, \pi/2]$.
Par inégalité de Cauchy-Schwarz, pour le produit scalaire usuel sur $\mathscr{C}^0([\varepsilon, \pi/2], \mathbb{R})$, on a

$$\left(\int_\varepsilon^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t\right) \times \left(\int_\varepsilon^{\pi/2} \ln(\sin(t))^2 (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t\right)$$

Comme les intégrales convergent sur $]0, \pi/2]$, on peut faire tendre $\varepsilon$ vers 0 pour obtenir :

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t\right) \times \left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))^2 (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t\right)$$

Ainsi $(f'(x))^2 \leqslant f''(x) f(x)$
On a montré que $(\ln \circ f)'' \geqslant 0$ sur $I$ d'où $\boxed{f \text{ est une application de } I \text{ dans } \mathbb{R} \text{ ln-convexe}}$

18) Soit $x > -\frac{1}{2}$. Comme $2x+2 > 2x+1 > 2x > -1$, selon (1), on a

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(x+1) &= \ln(g(2x+2)) = \ln((2x+2)g(2x+2)) - \ln(2x+2) \\ &= \ln((2x+1)g(2x)) - \ln(2x+2) = \widetilde{g}(x) + \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N},\ \widetilde{g}(x+k+1) - \widetilde{g}(x+k) = \ln\left(\dfrac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$. Par télescopage, on a alors

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \widetilde{g}(x+p) - \widetilde{g}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (\widetilde{g}(x+k+1) - \widetilde{g}(x+k)) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$$

On peut conclure que $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > -\frac{1}{2},\ \ \widetilde{g}(x+p) = \widetilde{g}(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)}$

19) Pour tous $x, y > -\frac{1}{2}$ et tout $\lambda \in [0,1]$ on a :

$\tilde{g}((1-\lambda)x+\lambda y) = (\ln \circ g)(((1-\lambda)2x+\lambda 2y) \leqslant (1-\lambda)(\ln \circ g)((2x)+\lambda(\ln \circ g)(2y) = (1-\lambda)\tilde{g}(x)+\lambda\tilde{g}(y)$

donc $\widetilde{g}$ est convexe sur $\left]\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[$.

En appliquant la croissance des pentes avec $n-1 \leqslant n+x \leqslant n+p$ et $n$ dans $\left]\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[$,

on a $\dfrac{\widetilde{g}(n)-\widetilde{g}(n-1)}{n-(n-1)} \leqslant \dfrac{\widetilde{g}(n+x)-\widetilde{g}(n)}{n+x-n} \leqslant \dfrac{\widetilde{g}(n+p)-\widetilde{g}(n)}{n+p-n}$

ce qui permet de conclure que $\boxed{\widetilde{g}(n)-\widetilde{g}(n-1) \leqslant \dfrac{\widetilde{g}(n+x)-\widetilde{g}(n)}{x} \leqslant \dfrac{\widetilde{g}(n+p)-\widetilde{g}(n)}{p}}$

D'après 18 avec $n-1 \geqslant 0$, on a $\widetilde{g}(n)-\widetilde{g}(n-1) = \ln\left(\dfrac{2(n-1)+1}{2(n-1)+2}\right) = \ln\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)$

Or $\ln\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par composition et donc $\widetilde{g}(n)-\widetilde{g}(n-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Toujours selon 18, on a par somme finie

$$\widetilde{g}(n+p)-\widetilde{g}(n) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2n+2k+1}{2n+2k+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or

$$x\left(\widetilde{g}(n)-\widetilde{g}(n-1)\right) \leqslant \widetilde{g}(n+x)-\widetilde{g}(n) \leqslant \frac{x}{p}\left(\widetilde{g}(n+p)-\widetilde{g}(n)\right)$$

Ainsi par produit et selon les gendarmes $\boxed{(\widetilde{g}(n+x)-\widetilde{g}(n)) \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$

À $x$ fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, ce résultat dépend de l'existence $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \leqslant p$.
Choisir $p = \lceil x \rceil$ valide ce résultat.

Le résultat demeure vrai pour $-\frac{1}{2} < x \leqslant 0$ car

$$\begin{aligned}\tilde{g}(n+x)-\tilde{g}(n) &= \tilde{g}(n-1+x+1)-\tilde{g}(n-1)+\tilde{g}(n-1)-\tilde{g}(n)\\ &= o_{n\to\infty}(1)-\ln\frac{2n-1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

20) Supposons de plus que $g(0) = \frac{\pi}{2}$.
Soit $x > -1/2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x) &= \tilde{g}(x)-\tilde{g}(n+x)+\tilde{g}(n+x)-\tilde{g}(n)+\tilde{g}(n)-\tilde{g}(0)+\tilde{g}(0)\\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}+o_{n\to\infty}(1)+\sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{2k+1}{2k+2}+\tilde{g}(0)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\tilde{g}(x) = \ln(\pi/2)+\sum_{k=0}^{\infty}\ln\frac{(2k+1)(2x+2k+2)}{(2k+2)(2x+2k+1)}$$

Ainsi $\tilde{g}$ est unique donc $g : x \mapsto \exp(\tilde{g}(x/2))$ l'est aussi.
Ainsi $f$ est l'unique application ln-convexe vérifiant (1) et valant $\pi/2$ en 0 (car $f(0) = \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t$).
(On peut remarquer de plus qu'on a obtenu une expression de $f$ comme limite d'un produit)

21) Soit $g$ de $]-T,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ln-convexe et vérifiant $\forall t \in ]-T,+\infty[,\ (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$

On pose $h : x \mapsto \dfrac{\pi g\,(Tx)}{2g(0)}$. Comme ci-dessus, on montre facilement que

$h$ est une application de $I$ dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que $h(0) = \dfrac{\pi}{2}$

Donc $h = f$ puis $g : t \mapsto \dfrac{2g(0)f(t/T)}{\pi}$

Réciproquement, on montre facilement que pour $k > 0$, l'application $g : t \mapsto kf(t/T)$ est une application de $]-T,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$, ln-convexes et vérifiant $\forall t \in ]-T,+\infty[,\ (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$.

On conclut pour $T \in \mathbf{R}_+^*$ :

$$\text{les applications } g : ]-T,+\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}, \text{ ln-convexes et vérifiant}$$

$$\forall t \in ]-T,+\infty[,\ (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

$$\text{sont les applications } g : ]-T;+\infty[ \to \mathbf{R} \text{ définie par } g : t \mapsto kf\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\text{avec } k > 0.$$

22) On rappelle que $T > 0$ !!!!

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une application $h$, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)$$

On évalue cette égalité en $-T$ pour trouver $h(T) = 0$ car $T \neq 0$ ce qui absurde car $\forall t \in \mathbf{R},\ h(t) > 0$.

En conclusion :

il n'existe pas d'application $h$, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant $\forall t \in \mathbf{R},\ (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)$