L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions de la variable réelle définies par :

$$\sigma(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x)=\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^x\ \mathrm{d}t$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série, ...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

I - Calcul de $\sigma(1)$

1) Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.
2) Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi}\left(\alpha t^2+\beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$$

puis vérifier que si $t\in]0,\pi]$, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

3) Justifier que, si φ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=0$$

4) Montrer que la fonction $h:t\mapsto\dfrac{t}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ et en conclure que

$$\sigma(1)=\frac{\pi^2}{6}$$

II - Équivalents

5) Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2) \qquad (1)$$

6) Justifier que f est décroissante et convexe sur I. On procédera sans chercher à dériver f.

7) Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

8) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$(n+1)f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

On admettra pour la suite que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et que pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))(\sin(t))^x \ \mathrm{d}t \quad \text{et } f''(x) = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2(\sin(t))^x \ \mathrm{d}t$$

III - Développement de f en série

Si $n \in \mathbb{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n \ \mathrm{d}t$.

9) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$$

10) En déduire $f'(0)$.

11) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} \ \mathrm{d}u$$

puis que

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!}x^n$.

IV - Calcul de $f''(0)$

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b, et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Psi(x) = \ln\left(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x\right)$$

13) Montrer que Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)$$

14) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k$$

On admettra que $\forall u \in]-1,1[\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u^k}{k} = -\ln(1-u)$.

15) En conclure que

$$\int_0^{\pi} \Psi(x)^2 \mathrm{d}x = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\rho^2\right)$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}$$

16) Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ \Psi_n(t) = \ln\left(a_n^2\cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t\right)$$

En déduire $f''(0)$.

V - Convexité logarithmique

Une application g d'un intervalle non trivial J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln \circ g$ est convexe sur J.

17) Vérifier que f est une application de I dans $\mathbb{R}$ ln-convexe.

Dans les questions 18) et 19), on se donne une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ supposée ln-convexe et vérifiant la même équation fonctionnelle (1) que la fonction f :

$$\forall x \in I \quad (x+1)g(x) = (x+2)g(x+2)$$

On appelle $\widetilde{g}$ l'application de $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall\, x > -\frac{1}{2} \qquad \widetilde{g}(x) = \ln(g(2x))$$

18) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > -\frac{1}{2},\ \widetilde{g}(x+p) = \widetilde{g}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$$

19) On suppose ici que $x \in \mathbb{R}_+^*, (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $x \leqslant p$. Vérifier que

$$\widetilde{g}(n) - \widetilde{g}(n-1) \leqslant \frac{\widetilde{g}(n+x) - \widetilde{g}(n)}{x} \leqslant \frac{\widetilde{g}(n+p) - \widetilde{g}(n)}{p}$$

et que $(\widetilde{g}(n+x) - \widetilde{g}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Etendre ce résultat au cas où $-\frac{1}{2} < x \leqslant 0$.

20) En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbb{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}$$

21) Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbb{R}_+^*$, toutes les applications g de $]-T, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in]-T, +\infty[\,,\ (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

22) Existe-t-il une application h, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)\,?$$