Problème I

Partie I - Étude d'un premier exemple

1) Ici $n = \dim(E) = 2$
Soit $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Par définition, $f(v) = (4, 1)$ qui est libre avec v car ce sont deux vecteurs non colinéaires.
La famille $(v, f(v))$ est libre et elle a $2 = \dim(E)$ éléments. C'est donc base de E.
Donc f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

2) En notant $\mathscr{B}$ la base canonique. On obtient $M = M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_M = \chi_f = X^2 - 5X + 6 = (X - 3)(X - 2)$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(f) = \{2, 3\}$.
En utilisant M on trouve :

$$E_2(f) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}((1, 1)) \text{ et } E_3(f) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}((2, 1))$$

3) En prenant n'importe quel w vecteur propre de f, $f(w)$ est alors colinéaire à w et donc $(w, f(w))$ liée.
Concrètement : Soit $w = (1, 1)$, $f(w) = 2w$. La famille $(w, 2w)$ est liée et n'est donc pas une base de E.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

4) Il suffit de calculer M^2 pour trouver que $M^2 = M + 2I_3$ qui rend compte matriciellement de la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On prend donc $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

5) Prenons $v \in \mathbb{R}^3$. Par 4) $g^2(v) = g(v) + 2v$ et donc $(v, g(v), g^2(v))$ n'est pas libre.
L'endomorphisme g n'est donc pas cyclique.

Partie III - Étude d'un troisième exemple

6) Montrons que Δ est linéaire :
Soit $P, Q \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X + 1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda P(X + 1) + \mu Q(X + 1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q)$
Ensuite soit $P \in E$ par principe des degrés,
$\deg(P(X+1)) = \deg(P(X))$ et $\deg(P(X+1)-P(X)) \leqslant \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X)))$ ainsi $\Delta(P) \in E$.
Conclusion Δ est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_d[X]$.

7) Soit $k \in [\![0, d]\!]$. Si $k = 0$, $\Delta(1) = 0$.
Si $k \geqslant 1$ en utilisant le binôme de Newton :

$$\Delta\left(X^k\right) = (X + 1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

On constate pour la suite que c'est un polynôme de degré $k-1$ et son coefficient dominant vaut k.

8) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ un polynôme non constant, notons $r \geqslant 1$ son degré.

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots \alpha_r X^r$$

Par linéarité de Δ,

$$\Delta(P) = \alpha_0\Delta(1) + \alpha_1\Delta(X) + \cdots \alpha_d\Delta(X^r)$$

Et grâce à la question 8), $\Delta(P)$ est bien un polynôme de degré $r-1$, et son coefficient dominant vaut $r\alpha_r$.

9) Prenons le vecteur X^d.
Par 9), la famille $(X^d, \Delta(X^d), \Delta^2(X^d), \cdots, \Delta^n(X^d))$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de d à 0 c'est une famille libre de $d+1$ vecteurs de E et $\dim(E) = d+1$ c'est donc une base de E.
Ainsi l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

10) Montons par récurrence sur p, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^p(v) = \alpha_1\lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^p v_n$$

— $\boxed{\text{I}}$ Pour $p = 0$, l'assertion est vraie par définition des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

— $\boxed{\text{H}}$: Soit $p \in \mathbb{N}$ quelconque fixé, supposons l'égalité :

$$f^p(v) = \alpha_1\lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^p v_n$$

On a alors

$$f^{p+1}(v) = f(f^p(v)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\lambda_k^p f(v_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\lambda_k^{p+1} v_k$$

11) Le déterminant de la famille $\mathscr{F} = (v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ dans la base $\mathscr{B}$ est le déterminant de la matrice des coordonnées de cette famille dans $\mathscr{B}$ leurs coordonnées étant données par la question précédente

Donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Il suffit alors de sortir $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ par n linéarité, et ainsi de tomber sur le déterminant de Vandermonde $V_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$

Conclusion

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

12) Montrons que f est cyclique si et seulement si f admet n valeurs propres distinctes.

— $\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée, on suppose que les valeurs propres de f ne sont pas deux à deux distinctes. Il existe alors $i \neq j$ tels que $\lambda_i = \lambda_j$. D'après la question précédente, pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = 0$. Ce n'est donc jamais une base. On en déduit que f n'est pas cyclique.

— $\boxed{\Leftarrow}$ Si f admet n valeurs propres distinctes.
Posons $v = v_1 + \cdots + v_n$ de sorte que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$.
D'après la question précédente $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$
On en déduit que $(v, h(v), \cdots, h^{n-1}(v))$ est alors une base de E et h est cyclique.

Partie V - Polynôme caractéristique d'un endomorphisme cyclique

13) Le vecteur $f^n(v) \in E$. On peut le décomposer dans la base $\mathscr{B} = (v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$. Il existe donc $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$f^n(v) = a_0 v + a_1 f(v) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(v)$$

Par définition, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme voulue.

14) Notons M la matrice obtenue ci-dessus. Par définition,

$$\chi_f = \chi_M = \det(M - XI_n) = \begin{vmatrix} X & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En développant selon la première ligne on obtient alors

$$\begin{aligned} \chi_M &= X \begin{vmatrix} X & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \times (-a_0) \begin{vmatrix} -1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= X\chi_{M'} - a_0 \end{aligned}$$

où M' est la matrice obtenue en enlevant la première ligne et la première colonne de M.

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})$$

On peut donc réiterer le calcul pour obtenir,

$$\chi_M = -a_0 + X(-a_1 + X\chi_{M''}) = -a_0 - a_1 X + X^2 \chi_{M''}$$

où M'' est la matrice obtenue en enlevant la première ligne et la première colonne de M'. En recommançant, on obtient

$$\chi_M = -a_0 - a_1 X - a_2 X^2 - \cdots - a_{n-2} X^{n-2} + X^{n-1} \chi_A$$

où $A = (a_{n-1})$. Comme $\chi_A = X - a_{n-1}$ on obtient finalement

$$\chi_f = \chi_M = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

Problème II

Partie I - Exemples

1) Notons, $u_n : x \mapsto \frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)$.
On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$
Donc $\|u_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ converge puisque que c'est la somme de deux séries géométriques convergentes. Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \|u_n\|_\infty$ converge. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Pour le calcul, on remarque que pour $p \geqslant 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p-e^{ix}}$$
En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p\cos(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1}$$
Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4 - 2\cos(x)}{5 - 4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$$

2) Posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n\cos(nx)$. La suite (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Propriétés

3) Notons, $u_n : x \mapsto a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leqslant |a_n| + |b_n|$$
Donc $\|u_n\|_\infty \leqslant |a_n| + |b_n|$. La série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| + |b_n|$ converge puisque que c'est la somme de deux séries convergentes. Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \|u_n\|_\infty$ converge. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

4) Si $a = b = 0$, le résultat cherché est vrai.
Supposons $(a, b) \neq (0, 0)$. Dans ce cas, $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2}(a'\cos(x) + b'\sin(x)$$
où $a' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $b' = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Comme $(a')^2 + (b')^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a' = \cos(\varphi)$ et $b' = \sin(\varphi)$. On en déduit donc que pour tout réel x,
$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi)$$
Il en découle que le maximum (sur $\mathbb{R}$) de la fonction $x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

5) Posons $u_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

puisque si $n \neq 0$, la fonction $x \mapsto nx$ est surjective.
De plus, pour tout entier n, $|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $|b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. On en déduit que si la série $\sum_{n\geqslant 0} \|u_n\|_\infty$ converge alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ puis les séries $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|$ et $\sum_{n\geqslant 0} |b_n|$ convergent par comparaison des séries positives
Finalement $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ convergent absolument.

6) a) Posons $u_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.
On vérifie que
— Pour tout entier naturel n, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$.
— La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ car elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = u_n(x + 2\pi)$. On en déduit alors que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x + 2\pi) = f(x + 2\pi)$$

On a bien montré que $f \in C_{2\pi}$.

b) On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(\cos(2nx) + 1)$. On a donc

$$\forall n \geqslant 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

De même, $\sin(kx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(kx+nx)+\sin(kx-nx))$. On utilise alors que pour tout entier naturel p, $x \mapsto \sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$; c'est évident si $p = 0$ et cela découle du fait que $x \mapsto -\dfrac{\cos(px)}{p}$ est une primitive de $x \mapsto \sin(px)$ sinon. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N},\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\ dx = 0$$

c) Posons encore, pour tout entier naturel k, $u_k : x \mapsto a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\alpha_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\cos(nx)\ dx$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |u_k(x)\cos(nx)| \leqslant |u_k(x)| \leqslant \|u_k\|_\infty$$

Cela implique que $\|x \mapsto u_k(x)\cos(nx)\|_\infty \leqslant \|u_k\|_\infty$. On en déduit que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} u_k(x)\cos(nx)$ (avec l'abus de notations habituel) converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Comme les fonctions, $x \mapsto u_k(x)\cos(nx)$ sont continues, on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur le SEGMENT $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\ dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx))\ dx\right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi,

$$\forall n \neq 0,\ a_n = \alpha_n(f)\ \text{ et }\ a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$$

7) a) Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g)\ \text{ et }\ \beta_n(f) = \beta_n(g)$$

b) Les fonctions $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaires, on a ici pour tout entier naturel n, $\alpha_n(g-f) = \beta_n(g-f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = \tilde{0}$.

8) Si f est paire, la fonction $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,

$$\forall n,\ \beta_n(f) = 0$$

On a aussi que la fonction $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$$

9) La fonction f étant paire, les coeffcients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\ dx$$

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,

$$\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\ dx = -\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\ dx = -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\ dx\right)$$

et ainsi

$$\forall n \neq 0,\ \alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

On a aussi

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\ dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

Comme les séries numériques $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n(f)$ et $\sum_{n\geqslant 0}\beta_n(f)$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

la série étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

10) Pour $x = 0$, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$. Pour $x = \pi$, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite car la série est absolument convergente) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$