L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
Les deux problèmes sont indépendants.

Problème I

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$$

1) En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les valeurs propres de f. Donner une base de chaque sous-espace propre de f.
3) Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

4) Déterminer des réels α, β tels que $g^2 = \alpha g + \beta \, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
5) L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Soit $d \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. On considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_d[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X], \quad \Delta(P) = P \circ (X + 1) - P$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X + 1)^2 - X^2 = 2X + 1$

6) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
7) Soit $k \in [\![0, d]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.
8) En déduire que si $P \in \mathbb{R}_d[X]$ est un polynôme non constant, alors :
$$\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$$
9) Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Dans toute la suite du sujet, on désigne par E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

On suppose dans cette partie que f est diagonalisable. Il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de f. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k.
Soit $v \in E$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

10) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

11) Justifier que le déterminant de la famille $\mathscr{F} = (v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ dans la base $\mathscr{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

12) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pour que f soit cyclique.

Partie V - Polynôme caractéristique d'un endomorphisme cyclique

On suppose dans cette partie que f est cyclique. On se donne un vecteur v tel que la famille $\mathscr{B} = (v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E.

13) Montrer qu'il existe des scalaires $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

14) En déduire χ_f en fonction de $a_0, \dots, a_{n-1}$.

Problème II

Dans ce qui suit, on appelle « série trigonométrique » une série de fonctions du type

$\sum_{n\geqslant 0}(x\mapsto a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ que l'on notera abusivement $\sum_{n\geqslant 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f\in C_{2\pi}$ et $n\in\mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx \quad\text{et}\quad \beta_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx$$

Partie I - Exemples

1) Démontrer que la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   Soit x un réel. Pour tout entier $p\geqslant 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$.
   (il n'est pas utile de réduire au même dénominateur mais on donnera un résultat sans nombre imaginaire).
2) Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0}a_n\cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Propriétés

Une condition suffisante

3) Démontrer que si les séries $\sum_{n\geqslant 0}a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

4) Soient $a,b\in\mathbb{R}$ quelconques.
   Démontrer que le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto|a\cos(x)+b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.
5) Démontrer que si la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum_{n\geqslant 0}a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

6) On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifier que $f\in C_{2\pi}$.

b) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,dx$ pour k et n entiers.

On admet dans la suite que pour $k, n \in \mathbb{N}$ avec $k \neq n$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,dx = 0$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

7) Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x et tout entier naturel n, on pose

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_0(f)}{2} & \text{si } n = 0 \\ \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose ici que la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx))$$

a) Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

On admet que la fonction nulle est la seule fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifiant que pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$.

b) Démontrer que $g = f$

En résumé, si $f \in C_{2\pi}$ et que la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

8) Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que valent les réels $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$.

9) Exemple : Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel n, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$.

Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

10) En déduire les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Déduire alors la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.