+1/1/60+

Interrogation 6 Suites et séries de fonctions MP2 – 2026/2027

Nom, prénom : .....

A. Vrai ou faux — 16 pts

Exercice 1.
Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = nx\,e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$. La suite (f_n) converge simplement vers 0.

1.a. La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$? ☐ Oui ☐ Non

1.b. La convergence est-elle uniforme sur $[0, a]$, pour $a > 0$ fixé ? ☐ Oui ☐ Non

1.c. La convergence est-elle uniforme sur $[a, +\infty[$, pour $a > 0$ fixé ? ☐ Oui ☐ Non

Exercice 2.
Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ sur $[0, +\infty[$. La suite (f_n) converge simplement vers 0.

2.a. La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$? ☐ Oui ☐ Non

2.b. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? ☐ Oui ☐ Non

2.c. La convergence est-elle uniforme sur $[1, +\infty[$? ☐ Oui ☐ Non

Exercice 3.
On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$. Converge-t-elle normalement…

3.a. … sur $]-1, 1[$? ☐ Oui ☐ Non

3.b. … sur $[-a, a]$, pour $0 < a < 1$ fixé ? ☐ Oui ☐ Non

3.c. … sur $[0, 1[$? ☐ Oui ☐ Non

Exercice 4.
On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$ sur $\mathbf{R}$.

4.a. Converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}$? ☐ Oui ☐ Non

4.b. Converge-t-elle normalement sur $[-1, 1]$? ☐ Oui ☐ Non

4.c. Converge-t-elle normalement sur $[1, +\infty[$? ☐ Oui ☐ Non

5. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$. Cocher les affirmations *vraies*.

☐ Si les f_n sont continues et si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors f est continue sur I.

☐ Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors elle converge normalement sur I.

☐ Si les f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ et si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ et (f_n') converge simplement vers f'.

☐ Si les f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$, si (f_n) converge simplement sur I vers f et si (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers g, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f' = g$.

B. Question rédigée

8 pts

6. Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que g est définie et continue sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et exprimer $g'(x)$ sous forme de série.

☐0 ☐2 ☐4 ☐6 ☐8 Correcteur