Interrogation 6 – Corrigé Suites et séries de fonctions MP2 – 2026/2027

A. Vrai ou faux — 16 pts

Exercice 1 — $f_n(x) = nx\,e^{-nx}$ sur $[0,+\infty[$.

La convergence simple vers 0 est claire : $f_n(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $nx\,e^{-nx} \to 0$ par croissances comparées.

1.a. La convergence vers 0 est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$?

NON. On voit que $f_n'(x) = n(1-nx)e^{-nx}$ change de signe en $\frac{1}{n}$: f_n est maximale en $\frac{1}{n}$ et

$$\|f_n - 0\|_{\infty,[0,+\infty[} = f_n\big(\tfrac{1}{n}\big) = e^{-1} \not\to 0.$$

1.b. La convergence est-elle uniforme sur $[0,a]$, pour $a > 0$ fixé ?

NON. Pour $n \geq \frac{1}{a}$, le point $\frac{1}{n}$ appartient à $[0,a]$, donc $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} = f_n(\frac{1}{n}) = e^{-1}$ ne tend pas vers 0. Le défaut de convergence uniforme se situe près de l'origine : la « bosse » de hauteur e^{-1} se rapproche de 0 sans s'écraser, et reste donc dans tout intervalle $[0,a]$.

1.c. La convergence est-elle uniforme sur $[a,+\infty[$, pour $a > 0$ fixé ?

OUI. Pour $n \geq \frac{1}{a}$, on a $a \geq \frac{1}{n}$ donc f_n est décroissante sur $[a,+\infty[$ (car $f_n'(x) < 0$ pour $x > \frac{1}{n}$) et positive. Ainsi

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a) = na\,e^{-na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées : la convergence est uniforme sur $[a,+\infty[$.

Exercice 2 — $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ sur $[0,+\infty[$.

2.a. La convergence vers 0 est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$?

OUI. Pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{1+nx}\right) \leq \frac{1}{n},$$

donc $\|f_n - 0\|_\infty \leq \frac{1}{n} \to 0$: la convergence est uniforme sur $[0,+\infty[$ (même si l'intervalle n'est pas borné).

2.b. La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?

OUI. C'est une conséquence de 2a : la majoration $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ sur $[0,+\infty[$ vaut a fortiori sur le sous-intervalle $[0,1]$.

2.c. La convergence est-elle uniforme sur $[1,+\infty[$?

OUI. Même argument : $\sup_{x\geq 1} f_n(x) \leq \sup_{x\geq 0} f_n(x) \leq \frac{1}{n} \to 0$.

Exercice 3 — série $\sum_{n\geq 0} x^n$.

3.a. Convergence normale sur $]-1,1[$?

NON. Pour tout n, $\|x \mapsto x^n\|_{\infty,]-1,1[} = \sup_{|x|<1} |x|^n = 1$, et la série $\sum 1$ diverge grossièrement.

3.b. Convergence normale sur $[-a,a]$, pour $0 < a < 1$ fixé ?

OUI. On a $\|x \mapsto x^n\|_{\infty,[-a,a]} = a^n$, terme général d'une série géométrique convergente (de raison $a \in]0,1[$).

3.c. Convergence normale sur $[0,1[$?

NON. Pour tout n, $\sup_{x\in[0,1[} x^n = 1$ et $\sum 1$ diverge.

Exercice 4 — série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ sur $\mathbf{R}$.

4.a. Convergence uniforme sur $\mathbf{R}$?

OUI. Pour $x \in \mathbf{R}$ fixé, la suite $\left(\frac{1}{n+x^2}\right)_n$ est positive, décroissante et de limite nulle : d'après le critère spécial des séries alternées, la série converge simplement, et son reste vérifie

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi $\|R_n\|_{\infty,\mathbf{R}} \leq \frac{1}{n+1} \to 0$: la série converge uniformément sur $\mathbf{R}$.

4.b. Convergence normale sur $[-1,1]$?

NON. Pour tout n, $x \mapsto \frac{1}{n+x^2}$ est maximale en $x = 0$, donc $\left\|x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}\right\|_{\infty,[-1,1]} = \frac{1}{n}$, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

4.c. Convergence normale sur $[1,+\infty[$?

NON. Sur $[1,+\infty[$, le maximum de $x \mapsto \frac{1}{n+x^2}$ est atteint en $x = 1$ et vaut $\frac{1}{n+1}$. Comme $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge, il n'y a pas de convergence normale.

5. Affirmations sur une suite (f_n) de fonctions de I dans $\mathbf{R}$.

- **VRAI** — C'est le théorème de continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.
- **FAUX** — La convergence normale implique la convergence uniforme, mais pas la réciproque. Cela a été vu dans l'exercice 4 ci-dessus.
- **FAUX** — La convergence uniforme de (f_n) ne dit rien sur les dérivées. Un exemple a été traité en cours avec $f_n : x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$.
- **VRAI** — C'est le théorème de dérivation (de classe $\mathscr{C}^1$) pour une suite de fonctions : convergence simple de (f_n) et convergence uniforme locale de (f_n').

B. Question rédigée — 8 pts

6. $g(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$: définition, continuité, classe $\mathscr{C}^1$..

On pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$ pour $n \geq 1$.

1. Définition et continuité. Appliquons le théorème de continuité des séries de fonctions.

- Chaque f_n est continue sur $\mathbf{R}$.
- Pour tout x, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$, donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^3}$
  On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge. Cela signifie que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbf{R}$.

La fonction g est bien définie sur $\mathbf{R}$ et est continue sur $\mathbf{R}$.

2. Classe $\mathscr{C}^1$. Appliquons le théorème de caractère $\mathscr{C}^1$ des séries de fonctions.

- Chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$.
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.
- Pour tout x, $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, donc $\|f_n'\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$
  On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \|f_n'\|_\infty$ converge. Cela signifie que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbf{R}$.

La fonction g est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$