MP 2026 – 2027

Exercices de mathématiques

Partie II

CHAPITRE 7

Algèbre générale

1 Applications du cours

A Groupes : généralités

□ **Exercice 1**

1) Montrer que $(]-1,1[, *)$ est un groupe pour la loi $*$ définie par :

$$\forall\,(x,y)\in\,]-1,1[^2\ ,\quad x*y=\frac{x+y}{1+xy}$$

2) Pour $x\in]-1,+1[$, exprimer $x^{(n)}$ en fonction de x et n.
On pourra utiliser une formule de trigonométrie hyperbolique.

□ **Exercice 2** Soit $A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$

1) Calculer $B=A^2$, $C=A^3$, $A+C$ et $U=A^4$.
2) Montrer que : $(\{U,A,B,C\},\times)$ est un groupe commutatif.

□ **Exercice 3** Soient $(G_1,.)$ et $(G_2,*)$ deux groupes. On rappelle que le produit cartésien $G_1\times G_2$, muni de la loi produit :$(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2)=(x_1.y_1,x_2*y_2)$ est un groupe.

1) Soit H le groupe $(\{-1,1\},\times)$. En notant e,a,b,c les éléments de $H\times H$, faire la table de ce dernier groupe.
2) Montrer que le groupe produit de $(\mathbf{R}^{+*},\times)$ par $(\mathbb{U},\times)$ est isomorphe au groupe $(\mathbf{C}^*,\times)$

□ **Exercice 4** Soit $(G,.)$ un groupe . Montrer que la réunion d'une suite croissante de sous-groupes de G est un sous-groupe de G .

□ **Exercice 5** Soit $*$ la loi de composition interne définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2\quad,\quad x*y=x+y-xy$$

1) Propriétés de la loi $*$?
2) Pour la loi $*$, $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ est-il un groupe ?

3) Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, exprimer l'itéré n fois de x par $*$.

□ **Exercice 6** Soit $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \right\}$.

1) Montrer que D est un groupe multiplicatif.
2) Déterminer le centre du groupe (i.e. les éléments de D qui commutent avec tous les autres).

□ **Exercice 7** Soit $(G, *)$ un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble de ses automorphismes. La composition munit $\mathrm{Aut}(G)$ d'une structure de groupe.
Pour tout élément $g \in G$ on note φ_g l'application de G dans lui-même définie par

$$\varphi_g : h \mapsto ghg^{-1}$$

1) Soit $g \in G$, montrer que φ_g est un automorphisme de G.
2) On considère l'application $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ qui associe à g l'application φ_g. Montrer que Φ est un morphisme de groupe.

B Groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$, ordre d'un élément d'un groupe, générateurs des groupes monogènes

□ **Exercice 8** Soient $(G, .), (H, .)$ des groupes cycliques de cardinaux respectifs m et n.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de ces groupes soit cyclique.

C Groupe symétrique

□ **Exercice 9**

1) Vérifier que $(1,3,4,7) = (1,3)(3,4)(4,7)$.
2) On considère le cycle $\gamma = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in \mathfrak{S}_n$ $(2 \leqslant p \leqslant n)$ où les a_i sont à deux à deux distincts.
Démontrer que $\gamma = \prod_{i=1}^{p-1} (a_i, a_{i+1}) = (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ \ldots \circ (a_{p-1}, a_p)$.

□ **Exercice 10** On considère la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_9$.

1) Décomposer σ en produit de cycles.
2) Décomposer σ en produit de transpositions.
3) Quel l'ordre de σ dans $\in \mathfrak{S}_9$? Calculer σ^{1000}.
4) Déterminer la signature de σ.

□ **Exercice 11** On considère la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$.

1) Décomposer σ en produit de cycles.
2) Décomposer σ en produit de transpositions.
3) Déterminer la signature de σ.

□ **Exercice 12** Soient τ_1 et τ_2 deux transpositions de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $\tau_1 \circ \tau_2 = id$ ou $(\tau_1 \circ \tau_2)^2 = id$ ou $(\tau_1 \circ \tau_2)^3 = id$.

□ **Exercice 13** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_9$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer σ^{2000}.

n) Dans $\mathfrak{S}_7$, écrire $\sigma = \rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1$ puis $\sigma' = \rho_2 \circ \rho_1 \circ \rho_3$ comme produit de cycles opérant sur des ensembles disjoints où :

$$\rho_1 = (1,3,5,2) \ , \ \rho_2 = (2,6,5,7) \ , \ \rho_3 = (5,4,7,3)$$

Même question dans $\mathfrak{S}_5$ avec $\sigma = (1,4) \circ (1,2,3) \circ (4,5) \circ (1,4)$.

□ **Exercice 15** Soit $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

1) Nombre de permutations de E ?
2) Soit $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ une permutation de E (l'image de $i \in E$ est x_i).
   On pose N le nombre dont l'écriture en base 10 est $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ et on classe ces nombres (ensemble noté S) par ordre croissant.

   Quel est le premier, le dernier, le $121^{\text{ième}}$?

   Que vaut $\sum_{N \in S} N$?
3) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall\, n \in S \quad , \quad \exists n' \in S \quad \text{tel que } n + n' = k$$

   Exemple de k ? Retrouver $\sum_{N \in S} N$.

D Anneaux : généralités

□ **Exercice 16** Soit m un nombre réel. Pour (x,y) et (x',y') appartenant à $\mathbf{R}^2$, on pose :

$$(x,y) * (x,y) = (xx' + myy', xy' + yx')$$

1) Démontrer que $(\mathbf{R}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.
2) Pour quelles valeurs du réel m cet anneau est-il intègre ?

□ **Exercice 17** Soit $(A, +, .)$ un anneau , $(a,b) \in A^2$ tels que :

$$a.b + b.a = 1 \quad , \quad a^2.b + b.a^2 = a$$

1) Montrer que : $a^2.b = b.a^2$ et $2a.b.a = a$.
2) Etablir que a est inversible et que son inverse est $2b$.

□ **Exercice 18** On pose : $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x \oplus y = x + y + 1$ et $x \otimes y = x + y - xy$.
Démontrer que $(\mathbf{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps commutatif.

□ **Exercice 19** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que : $H = \{aI_2 + bA / (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$ est un corps.

□ **Exercice 20** Soit A l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de la forme

$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx),\ n \in \mathbf{N},\ a_i \in \mathbf{R}$.

1) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2) Soit $f \in A$. Montrer que si $f = 0$, alors les coefficients a_k sont tous nuls.
3) En déduire que A est intègre.

□ **Exercice 21** Soit $\alpha \in \mathbf{Q}^{+*}$ tel que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbf{Q}$, et $\mathbf{Q}[\sqrt{\alpha}] = \{r + r'\sqrt{\alpha}\ ;\ (r,r') \in \mathbf{Q}^2\}$.
Montrer que $\mathbf{Q}[\sqrt{\alpha}]$ est un corps pour les lois usuelles .

E Idéaux d'un anneau

□ **Exercice 22** Soit $\mathbf{Z}[i] = \{a + ib / (a,b) \in \mathbf{Z}^2\}$ que l'on munit de l'addition et de la multiplication usuelle de $\mathbf{C}$.

1) Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un anneau (appelé *anneau des entiers de Gauss*) .
2) On considère $N : \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{Z}$ définie par $N : a + ib \mapsto a^2 + b^2$.
   Montrer que pour z, z' dans $\mathbf{Z}[i]$, $N(zz') = N(z)N(z')$.
   En déduire les éléments inversibles de $\mathbf{Z}[i]$.
3) Soit $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Montrer qu'il existe $u \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $|z - u| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire que :

$$\forall\, u \in \mathbf{Z}[i] \ , \ \forall\, v \in \mathbf{Z}[i]\backslash\{0\} \ , \ \exists\, q, r \in \mathbf{Z}[i] \ , \ u = vq + r \text{ avec } N(r) < N(v)$$

4) Soit I un idéal de $\mathbf{Z}[i]$. Montrer qu'il est de la forme $z\mathbf{Z}[i]$ où $z \in I$.
   On pourra s'inspirer de la démonstration faite dans le cas de l'anneau $\mathbf{K}[X]$.

□ **Exercice 23** Soit A un anneau commutatif non nul.
Un idéal I de A est dit premier si et seulement si $\forall (x,y) \in A^2,\ xy \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$.
Montrer que si tout idéal de A est premier alors A est un corps.

□ **Exercice 24** Soit A un anneau commutatif et (I_n) une suite croissante d'idéaux de A. On pose $I = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n$.

1) Montrer que I est un idéal de A.
2) On suppose que A est principal (c'est à dire que tout idéal de A est principal : de la forme xA pour un certain $x \in A$). Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $I = I_{n_0}$.
3) En déduire que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ n'est pas principal.

□ **Exercice 25** Soit A un anneau commutatif.
Un idéal $\mathfrak{p} \neq A$ est dit *premier* si et seulement si

$$\forall x, y \in A \quad xy \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p} \text{ ou } y \in \mathfrak{p}$$

Soit $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ des idéaux premiers tels que $\forall i, j \in [\![1, n]\!] \ , \ i \neq j \ , \quad \mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$.

1) Soit $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}}$ une famille d'éléments de A tels que $\forall i, j \ , \ i \neq j \ , \ a_{i,j} \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_j$. On pose pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $b_j = \prod_{i \neq j} a_{i,j}$.
   Démontrer que pour tout $i \neq j$, $b_j \in \mathfrak{p}_i$ et que $b_j \notin \mathfrak{p}_j$.
2) Soit I un idéal quelconque de A Montrer que :

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \ \Rightarrow \ \exists i_0 \in [\![1, n]\!] \ \ I \subset \mathfrak{p}_{i_0}$$

On pourra raisonner par l'absurde et considérer $\sum_j b_j c_j$ *avec des* c_j *judicieusement choisis.*

F Arithmétique dans Z

□ **Exercice 26**

1) Vérifier que 429 et 700 sont premiers entre eux.
2) Déterminer tous les couples $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que : $700\,u + 429\,v = 1$.

□ **Exercice 27** Soit $n \in \mathbf{N}$. déterminer le pgcd de $5^n + 6^n$ et $5^{n+1} + 6^{n+1}$.

□ **Exercice 28** Calculer 10^k modulo 7 et en déduire $\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5\ (7)$.

□ **Exercice 29** Quel est le reste de la division euclidienne de 2792^{217} par 5 ?

□ **Exercice 30** Calculer le reste modulo 41 de l'entier $51200^{2^{100}}$, le reste modulo 17 de 1035125^{5642}

□ **Exercice 31** Quel est le reste de la division euclidienne de 51200^{100} par 41 ?
Même question avec 1986^{10000} et 31 , puis 1035125^{5642} et 17.

□ **Exercice 32** Montrer que : $\forall\ (a,b)\ \in\ (\mathbf{Z}^\star)^2\ ,\ \ a^2 \mid b^2 \implies a \mid b$.

G Anneau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, .)$

□ **Exercice 33** Résoudre dans $\mathbf{Z}/20\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/20\mathbf{Z}$ le système : $\begin{cases} \bar{4}x + \bar{5}y = \overline{13} \\ \bar{2}x + \bar{3}y = \overline{11} \end{cases}$

□ **Exercice 34** Résoudre dans $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$: $\begin{cases} \bar{3}x + \bar{7}y = \overline{3} \\ \bar{6}x - \bar{4}y = \overline{0} \end{cases}$

□ **Exercice 35** Résoudre dans $\mathbf{Z}/37\mathbf{Z}$: $x^2 - \overline{31}x + \overline{18} = 0$.

□ **Exercice 36** Résoudre dans $\mathbf{Z}/35\mathbf{Z}$: $x^2 - \overline{31}x + \overline{18} = 0$.

□ **Exercice 37** On considère $(\mathbf{Z}/20\mathbf{Z})^\star$, l'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication dans l'anneau $((\mathbf{Z}/20\mathbf{Z}), +, \times)$. Déterminer ses éléments et le reconnaître comme isomorphe à un groupe produit simple.

2 Exercices plus élaborés

A Groupes : généralités

□ **Exercice 38** Soient $(G, .)$ un groupe , H et K deux sous-groupes de G .

On note $HK = \{h.k/(h,k)\ \in\ H \times K\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) HK est un sous-groupe de G , ii) $HK \subset KH$

iii) KH est un sous-groupe de G , iv) $KH \subset HK$

□ **Exercice 39** Sur $G = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, on définit la loi de composition interne $\star$ par :

$$\forall\ (a,b),(a',b')\ \in \mathbf{R}^\star \times \mathbf{R}\ \ ,\ \ (a,b) \star (a',b') = (aa', ba' + b')$$

Montrer que $(G, *)$ est isomorphe au groupe des transformations affines de la droite réelle (muni de la loi $\circ$). Montrer que $(G, *)$ est un groupe non abélien .

Chercher les sous-groupes abéliens de G.

□ **Exercice 40**
Démontrer qu'un sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique. Que dire de son ordre ?

□ **Exercice 41**
Soit $(G, *)$ un groupe fini et χ un morphisme de $(G, *)$ dans $(\mathbf{C}^*, \times)$. Montrer que

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ n'est pas constante} \\ \text{Card}(G) & \text{sinon} \end{cases}$$

B Ordre d'un élément d'un groupe

□ **Exercice 42** Soit $(G,.)$ un groupe **abélien** fini.

1) Soient $x, y \in G$. Soient m et n les ordres respectifs de x et y. On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre mn.
2) On appelle **exposant** de $(G,.)$ le plus grand des ordres de ses éléments.
Montrer que l'ordre de chaque élément de G divise l'exposant de $(G,.)$.
3) Soit p un nombre premier. Montrer que le groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est cyclique.
4) Montrer que l'exposant de $(G,.)$ et le cardinal de G ont mêmes facteurs premiers.

C Groupes de permutations

□ **Exercice 43** Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$. On note $f(n)$ le plus grand des ordres des éléments de $\mathfrak{S}_n$.

1) Montrer que $f(n) = \max\{\text{ppcm}(a_1,\dots,a_k),\ k \in \mathbf{N}^*,\ a_1,\dots,a_k \in \mathbf{N}^*,\ a_1+\dots+a_k = n\}$.
2) Montrer que pour tous $k, a_1, \dots, a_k \in \mathbf{N}^*$, on a :
$$\prod_{i=1}^{k} a_i \leqslant \text{ppcm}(a_1,\dots,a_k) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant k} \text{pgcd}(a_i,a_j)$$
3) Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $n^p = \underset{n\to\infty}{O}(f(n))$.

□ **Exercice 44** Soit $n \geqslant 3$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit $a \neq b$ dans $[\![1,n]\!]$.

1) Simplifier $\sigma \circ (a,b) \circ \sigma^{-1}$.
2) Déterminer l'ensemble des permutations qui commutent avec (a,b).
3) Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire les permutations $\mathfrak{S}_n$ qui commutent avec toutes les autres.

□ **Exercice 45**

1) Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout cycle $\gamma = (a_1,\dots,a_p)$ on a $\sigma\circ\gamma\circ\sigma^{-1} = (\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_p))$.
2) Vérifier que : $(2,5) = (4,5)\circ(2,4)\circ(4,5)$, puis que
$(2,5) = (4,5)\circ(3,4)\circ(2,3)\circ(3,4)\circ(4,5)$.
3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
En généralisant ce procédé, démontrer que la partie $B = \left\{(i,i+1)\middle/ 1 \leqslant i < n\right\}$ est génératrice du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
4) Démontrer que cette partie génératrice est minimale (c'est-à-dire qu'aucune de ses sous-parties strictes n'est génératrice). (On démontrera que $n-2$ transpositions appartenant à B n'engendrent pas $\mathfrak{S}_n$)
5) Démontrer que la transposition $\tau = (1,2)$ et le cycle $\gamma = (1,2,\dots,n)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.
6) $\{\tau,\gamma\}$ est-elle une partie génératrice minimale de $\mathfrak{S}_n$?

D Anneaux : généralités

□ **Exercice 46**

1) Montrer que l'ensemble $E = \{x + y\sqrt{2}/(x, y) \in \mathbf{Z}^2\}$, muni de l'addition et de la multiplication des réels, est un anneau.
2) Déterminer l'ensemble U des éléments inversibles de E (on utilisera l'application N qui à $z = x + y\sqrt{2} \in E$ associe $N(z) = x^2 - 2y^2$).

□ **Exercice 47** Déterminer les automorphismes du corps $\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\sqrt{2}$.

□ **Exercice 48** Montrer que

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x + 4y \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

est un corps isomorphe à $\mathbf{C}$.

□ **Exercice 49** Soit A un anneau intègre et fini, non réduit à $\{0\}$, et soit a un élément non nul de A. Montrer que l'application de A vers A définie par : $x \mapsto ax$ est bijective. En déduire que A est un corps.

□ **Exercice 50** Soit A un anneau et $x \in A$. Il est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

1) Montrer que si xy est nilpotent alors yx l'est aussi.
2) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent , alors $x + y$ et xy sont nilpotents.
3) Montrer que si A est commutatif , l'ensemble N des éléments nilpotents est un idéal de A.
4) Montrer que : x nilpotent $\Longrightarrow$ $(1 - x)$ est inversible (et calculer son inverse).

□ **Exercice 51**

1) Démontrer l'identité $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.
2) Montrer que $j : \mathbf{Q}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $j : (a, b, c) \mapsto a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ est injective
3) Montrer que $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} ; (a, b, c) \in \mathbf{Q}^3\}$ est un sous-corps de $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 52** Soit $a \in \mathbf{C}$. On pose

$$\mathbf{Q}[a] = \{P(a),\ P \in \mathbf{Q}[X]\} \qquad I(a) = \{P \in \mathbf{Q}[X],\ P(a) = 0\}$$

On dit que a est **algébrique** si et seulement si il existe $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(a) = 0$.

1) Montrer que si a est algébrique, alors :
   - Il existe un polynôme $M \in \mathbf{Q}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbf{Q}$ tel que $I(a) = M\mathbf{Q}[X]$.
   - $\mathbf{Q}[a]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.
   - $\mathbf{Q}[a]$ est un corps
2) Montrer que si $\mathbf{Q}[a]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, alors a est algébrique.
3) Soient $a, b \in \mathbf{C}$ des nombres algébriques. Montrer que la famille $(a^p b^q)_{p,q \in \mathbf{N}}$ est de rang fini. En déduire que ab et $a + b$ sont algébriques.
4) Que dire de l'ensemble des nombres algébriques ?
5) Déterminer $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.

E Arithmétique dans $\mathbf{Z}$

□ **Exercice 53** Pour quels entiers n a-t-on $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 \equiv 0 \mod (512)$?

□ **Exercice 54** Résoudre dans $\mathbf{N}^2$: $11(x \wedge y) + (x \vee y) = 203$.

□ **Exercice 55** Montrer que pour tout n entier relatif, $n^7 - n$ est divisible par 42.

□ **Exercice 56** Résoudre dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ l'équation : $2x + 5y - 11z = 1$.

□ **Exercice 57**

1) Montrer que si x et y sont premiers entre eux, il en est de même de $x + y$ et xy.
2) Etudier la réciproque.
3) Résoudre dans $\mathbf{N}^2$: $\begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$

□ **Exercice 58** Soient $a, b, c \in \mathbf{N}$. Montrer que $(a^b - 1)(a^c - 1)$ divise $(a - 1)(a^{bc} - 1)$.

□ **Exercice 59** On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1) Montrer que si m et n sont deux entiers distincts, alors F_n et F_m sont premiers entre eux.
2) Montrer que F_n divise $2^{F_n} - 2$.

□ **Exercice 60** Soient $a \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, deux entiers naturels m et n tels que $m > n$.
Montrer que : $\text{pgcd}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{pgcd}(m,n)} - 1$.

F Anneau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, .)$

□ **Exercice 61** Déterminer les entiers relatifs x vérifiant simultanément :

$$3x - 10 \in 7\mathbf{Z} \ , \ 11x + 8 \in 17\mathbf{Z} \ , \ 16x - 1 \in 5\mathbf{Z}$$

□ **Exercice 62** Résoudre l'équation $x^2 = 1$ dans $\mathbf{Z}/105\mathbf{Z}$.

□ **Exercice 63** Étude de $(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^*$.

1) Déterminer les éléments et le cardinal de $(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^*$.
2) Pour tout entier a dans $\mathbf{Z}$ tel que $\bar{a} \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^*$ et tout $n \geq 3$, calculer $a^{2^{n-2}}$ modulo2^n.
On pourra procéder par récurrence.
3) Le groupe $\left(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}\right)^*$ est-il cyclique ?

□ **Exercice 64** Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, et $d \in \mathbf{N}$ tel que $d|n$.
Déterminer les sous-groupes d'ordre d de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

□ **Exercice 65** Soit p un nombre premier.

1) Déterminer les inversibles de $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.
2) Soit k un entier naturel. Déterminer la classe de $k^{p(p-1)}$ modulo p^2.
On pourra utiliser le théorème d'Euler.

□ **Exercice 66** Soit p un nombre premier impair.

1) Que dire de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$?
2) Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on note $\bar{k}$ la classe de k dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
Démontrer que $\bar{1}^{-1} + \bar{2}^{-1} + \ldots + (\overline{p-1})^{-1} = \bar{0}$.
3) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrer que $p|\binom{p}{k}$.
On note $x_k = \frac{1}{p}\binom{p}{k}$. Montrer que $\bar{x}_k = (-\bar{1})^{k-1}\bar{k}^{-1}$.
4) On pose $m = \frac{2^{p-1}-1}{p}$. En vertu du petit théorème de Fermat, m est un entier.
Démontrer que $\bar{m} = (\bar{1})^{-1} + \bar{3}^{-1} + \bar{5}^{-1} + \ldots + (\overline{p-2})^{-1}$.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ Exercice 67

Soit G un groupe multiplicatif fini d'ordre n. Soit H un sous-groupe de G d'ordre p.

1) Montrer que pour tout $a, b \in G^2$, $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \varnothing$.
2) Montrer que p divise n.
3) Supposons que $n = pq$ avec $p < q$, et q premier.
   Montrer (par l'absurde),qu'il existe au plus un sous-groupe d'ordre q.
4) Si $n = 9$, montrer qu'il existe au moins un sous-groupe de G d'ordre 3.
   Montrer qu'il en existe 1 ou 4.

□ Exercice 68 (Les $p-$ groupes de Prüfer)

Soit $p > 1$ un entier premier. Soit $m \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathbf{U}_m$ est le groupe des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
Soit $G_p = \{z \in \mathbf{C}\ ,\ \exists k \in \mathbf{N}\ ,\ \ z^{(p^k)} = 1\}$.

1) Montrer que G_p est un groupe multiplicatif.
2) Montrer que tous les sous-groupes de G_p sont cycliques, à l'exclusion de G_p, et qu'aucun d'entre eux n'est maximal au sens de l'inclusion.
   On pourra considérer la famille des $(U_{p^k})_{k\in\mathbf{N}}$.
3) Montrer que G_p n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments.

CHAPITRE 8

Probabilités I

1 Applications du cours

A Généralités

□ **Exercice 1** Une grenouille monte un escalier de n marches. Elle peut progresser en sautant d'une marche à la suivante ou en sautant par dessus une marche. On note u_n le nombre de façons qu'a la grenouille d'atteindre le haut de l'escalier.

1) Déterminer u_1, u_2, u_3.
2) Déterminer une relation entre u_{n+1}, u_n et u_{n-1}. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3) À l'aide d'une autre méthode, exprimer u_n sous forme d'une somme.

□ **Exercice 2** Une urne contient des boules numérotées de 0 à n. On en prend une poignée au hasard et on note les numéros obtenus. On effectue deux tirages indépendants. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de numéros communs entre les deux poignées. Déterminer la loi de X.

□ **Exercice 3** Soient m, n, p des entiers $\geqslant 1$ tels que $p \leqslant \min(m, n)$. Une urne contient m boules mauves et n boules noires. On tire simultanément p boules dans l'urne et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules mauves tirées. Quelle est la valeur la plus probable de X ?

□ **Exercice 4** Soient A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A \cap B)\,\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B})\,\mathbf{P}(\overline{A} \cap B)$.

□ **Exercice 5** Soit X une variable aléatoire discrète réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Pour tout λ réel, on pose $\mathbf{P}(\lambda) = \lambda^2 + 2X\lambda - X$.
Soit Y le nombre aléatoire de racines réelles de P. Montrer que Y est une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, et déterminer sa loi en fonction de celle de X.

□ **Exercice 6** Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à obtenir la dernière boule blanche.
On note X le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de X.

B Lois usuelles

□ **Exercice 7** Un magasin dispose d'un stock de N produits. Le nombre de clients qui passent dans une journée suit la loi de Poisson de paramètre λ et chaque client a une probabilité p d'acheter le produit. Quelle est la probabilité que le magasin soit en rupture de stock avant la fin de la journée ?

□ **Exercice 8** Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$, deux variables aléatoires réelles indépendantes. Soit k un entier compris entre 0 et $n+m$.
Déterminer la loi de X conditionnée par $(X+Y=k)$.

□ **Exercice 9** Lors de la Journée Portes Ouvertes du lycée, le nombre de visiteurs pour l'option Maths Sup suit une loi de Poisson de paramètre λ. Trois conférenciers A,B,C proposent une présentation, et chaque visiteur assiste indifféremment à l'une ou l'autre.

1) Quelle est la loi conditionnelle du nombre de spectateurs dans la salle A, sachant que le nombre de visiteurs est k ?
2) Quelle est la loi du nombre de spectateurs dans la salle A ?

□ **Exercice 10** Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi géométrique de paramètre $1/2$. On pose : $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$. Déterminer la loi de (U,V).

□ **Exercice 11** Soit X une variable aléatoire discrète réelle réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, telle que $X(\Omega) \subset \mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose alors $U = \mathbf{1}_{(X \leqslant n)}$ et $T = XU$.

1) Montrer que T est une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
2) Déterminer la loi de T si X suit une loi géométrique de paramètre p.

□ **Exercice 12** Soit $p \in]0,1[$. $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ définies sur un espace probablisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $E_\omega = \{n \in \mathbf{N}^*\ ,\ X_n(\omega) = 1\}$.
On note $T : \Omega \to \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \mathrm{Card}(E_\omega) \leqslant 1 \\ \text{deuxième plus petit élément de } E_\omega \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de T.

□ **Exercice 13** Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2. L'entier p restera fixé dans tout l'exercice. On considère np variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_{np}$. On suppose que la variable aléatoire X_k suit une loi de Poisson de paramètre λ_1 (respectivement : λ_2) pour tout k appartenant à $[\![1,p]\!]$ (respectivement : $[\![p+1, np]\!]$). On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{np} X_i, \quad A = \sum_{i=1}^{p} X_i, \quad B_n = \sum_{i=p+1}^{np} X_i$$

1) Déterminer les lois des variables aléatoires A et B_n.
2) Quelle est la loi de S_n ?
3) Soit $\ell \in \mathbf{N}$.
   a) On considère une variable aléatoire Y_ℓ dont la loi est donnée par :

   $$\mathbf{P}(Y_\ell = m) = P_{(S_n = \ell)}(A = m) \text{ pour tout } m \in \mathbf{N}.$$

   Déterminer explicitement cette loi.
   b) De même on considère une variable aléatoire Z_ℓ dont la loi est donnée par :

   $$\mathbf{P}(Z_\ell = m) = P_{(S_n = \ell)}(B_n = m) \text{ pour tout } m \in \mathbf{N}.$$

   Déterminer explicitement cette loi.

□ **Exercice 14** Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\mathbf{P}(X \geqslant n) > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
On appelle *taux de panne* de X la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des probabilités conditionnelles définies par :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, x_n = \mathbf{P}_{(X\geq n)}\big(X = n\big).$$

1) a) Vérifier que $\mathbf{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbf{N}^*$.
   b) Déterminer le taux de panne de la variable aléatoire Y.
2) Dans le cas général, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k) = (1 - x_1)\dots(1 - x_{n-1})$$

   puis exprimer $p_n = \mathbf{P}(X = n)$ en fonction des x_k.
3) Déterminer les lois de variables à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ ayant un taux de panne constant.

2 Exercices plus élaborés

A Généralités

□ **Exercice 15** Pour n et p deux entiers non nuls, on pose $E = \{1, \cdots, n\}$ et $F = \{1, \cdots, p\}$. On note S_n^p le nombre de surjections de E dans F.

1) Calculer S_n^p pour $p > n \geqslant 1$.
2) Calculer S_1^1, S_2^1 , puis pour tout $n \geqslant 1,\ S_n^1$.
3) Calculer S_2^2, S_3^2 , puis pour tout $n \geqslant 2,\ S_n^2$.
4) Calculer pour tout $n \geqslant 1,\ S_n^n$ et S_{n+1}^n.
5) On suppose $n > p \geqslant 1$.
   En considérant la restriction à $\{1, \cdots, n-1\}$ d'une surjection de E dans F, montrer la relation :

$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1}\right)$$

□ **Exercice 16** Soit $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![\, 1\,;\, n\,]\!]$. Soit $\sigma \in \mathscr{E}_n$, i est un point fixe de σ si $\sigma(i) = i$. Une permutation sans point fixe est appelée dérangement de $\mathscr{E}_n$.

1) Soit $B_1, \dots, B_n$ des parties d'un ensemble fini E. Montrer que :

$$\mathrm{Card}(B_1 \cup \dots \cup B_n) = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1} \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_p\leqslant n} \mathrm{Card}(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_p}).$$

   On pourra considérer la fonction caractéristique du complémentaire de $B_1 \cup \dots \cup B_n$ dans E.
2) Soit A_i l'ensemble des permutations laissant fixe i, et D_n l'ensemble des dérangements. Exprimer D_n en fonctions des ensembles A_i et calculer alors $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$ à l'aide de la formule ci-dessus.
3) Plus généralement,on note F_n^p l'ensemble des permutations ayant exactement p points fixes. Exprimer $f_n^p = \#F_n^p$ en fonction de d_{n-p}, et en déduire que

$$f_n^p = \frac{n!}{p!}\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(-1)^k}{k!}$$

4) On permute au hasard les entiers de $[\![\, 1\,;\, n\,]\!]$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de cette permutation. Déterminer la loi de X.

□ **Exercice 17**

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, on a $1 - x \leqslant e^{-x}$.
2) Soit $\ell \in \mathbf{N}^*$ et $E_1, E_2, \ldots, E_\ell$ une famille de ℓ événements indépendants. Montrer que l'on a
$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{1\leq i\leq \ell} \overline{E_i}\Big) \leqslant e^{-\sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{P}(E_i)}$$
3) On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne. Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment. On note A_k l'événement « la boule numérotée 10 sort lors du $k^{ème}$ tirage ».
Les événements A_k sont supposés indépendants.
   a) Déterminer $\mathbf{P}(A_k)$.
   b) Pour tout $n \geqslant 10$, on note B_n l'événement « la boule 10 sort au moins une fois à partir du $n^{ème}$ tirage ». Exprimer B_n en fonction des événements A_k et déterminer $\mathbf{P}(B_n)$.
   c) On note C l'événement « la boule 10 sort un infinité de fois ». Exprimer C en fonction des événements précédents et déterminer $\mathbf{P}(C)$.
   d) Calculer la probabilité que le 10 sorte une infinité de fois de suite.
4) On suppose cette fois que la personne remplit l'urne de sorte qu'il y ait dans l'urne n^2 boules, numérotées de 1 à n^2, le $n^{ème}$ jour (elle met donc une boule numérotée 1 le premier jour, trois boules numérotées 2, 3, 4 le deuxième jour, cinq boules le troisième, ...). Comme à la question précédente, elle tire alors une boule, note son numéro et la remet immédiatement dans l'urne.
Quelle est la probabilité que le nombre 10 sorte une infinité de fois ?

□ **Exercice 18** On considère un tournoi de n participants ($n \geqslant 2$) où le vainqueur est le joueur qui a obtenu le plus de points. On note X_i la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ qui est égale au nombre de points obtenus par le joueur i à l'issue du jeu.
On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées. On notera F de fonction de répartition :
$$\forall k \in \mathbf{N}, F(k) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant k)$$
On note V_n l'événement : « il existe un unique vainqueur ».

1) Écrire V_n comme la réunion de n événements disjoints.
2) En déduire que $\mathbf{P}(V_n) = n \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 = k) F(k-1)^{n-1}$.
3) On suppose que X_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(V_n) = 0$.
Commenter le résultat.
4) On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{0, \ldots, m\}$ ($m \in \mathbf{N}$).
   a) Donner alors l'expression de $\mathbf{P}(V_n)$.
   b) À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que quand m tend vers l'infini, on a : $\sum_{k=0}^{m} k^{n-1} \sim \frac{m^n}{n}$.
   c) En déduire $\lim_{m\to+\infty} \mathbf{P}(V_n)$. Commenter le résultat.

□ **Exercice 19** Soit $n \geqslant 2$.

Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définie par $J[p,q] = \begin{cases} 1 & \text{si } q-p=1 \\ 1 & \text{si } p=n, q=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1) Déterminer les valeurs propres de J, en exhibant pour chacune un vecteur propre (réel ou complexe) associé.
   En déduire que la matrice J est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.
2) On note $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ les n points du plan, d'affixes respectives $z_k = e^{2ik\pi/n}$, pour $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$.
   Une puce se trouve au temps $t = 0$ en A_0.
   - si à l'instant t, elle se trouve en A_k, pour $k \in [\![1\,;\, n-2]\!]$, elle se trouvera à l'instant $t+1$, soit en A_{k-1} soit en A_{k+1}, ceci avec équiprobabilité.
   - si à l'instant t, elle se trouve en A_0, elle se trouvera à l'instant $t+1$, soit en A_{n-1} soit en A_1, ceci avec équiprobabilité.
   - si à l'instant t, elle se trouve en A_{n-1}, elle se trouvera à l'instant $t+1$, soit en A_{n-2} soit en A_0, ceci avec équiprobabilité.

   Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on note X_m la variable aléatoire à valeurs dans $[\![0\,;\, n-1]\!]$ telle que pour tout $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, $(X_m = k)$ est l'événement « la puce est en A_k à l'instant m ».
   On pose alors $U_m = (\mathbf{P}(X_m=0)\ \ \mathbf{P}(X_m=1)\ \cdots\ \mathbf{P}(X_m=n-1))^\top \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
   a) Déterminer U_0
   b) Déterminer une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$, $U_{m+1} = AU_m$.
   c) Exprimer A à l'aide de puissances de la matrice J.
   d) En déduire les valeurs propres de la matrice A. Montrer que la matrice A est diagonalisable.
   e) On suppose que n est impair et supérieur à 3. Déterminer un vecteur propre associé à la valeur propre de module maximal puis en déduire la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(X_m)_{m\in\mathbf{N}}$, c'est à dire : déterminer, pour tout k dans $[\![0\,;\, n-1]\!]$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathbf{P}(X_m = k)$.

□ **Exercice 20** La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est $F_X : t \mapsto \mathbf{P}(X \leqslant t)$.

1) Montrer que, pour une variable aléatoire X, F_X est croissante de limite 1 en $+\infty$.

Soient E un ensemble dénombrable de $\mathbf{R}$, (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans E et X une variable à valeurs dans E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\mathbf{P}(X_n = x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(X = x)$.

2) Montrer que $\sum\limits_{x\in E} \left|\mathbf{P}(X_n = x) - \mathbf{P}(X = x)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Pour $\varepsilon > 0$ fixé, considérer une partie finie $I \subset E$ telle que $\mathbf{P}(X \in I) > 1-\varepsilon$.
3) Montrer que (F_{X_n}) converge uniformément vers F_X.

B Lois usuelles

□ **Exercice 21** Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ avec X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, X et Z suivant $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et Y suivant $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. Déterminer la probabilité que U soit vecteur propre de A.

□ **Exercice 22** Soient A, B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{P}(A^B \leqslant B^A)$.

□ **Exercice 23**

1) Soit $(p,q,r) \in \mathbf{N}^3$, montrer que $\sum\limits_{\substack{i,j\geqslant 0\\ i+j=r}} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{r}$.

C'est la formule de Vandermonde.

2) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi $\mathscr{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$. Déterminer $\mathbf{P}(X=Y)$.

3) Que pensez vous de l'affirmation suivante : « Si on lance un grand nombre (pair) de fois une pièce équilibrée, il y a une forte probabilité d'obtenir exactement autant de piles que de faces » ? Déterminer un équivalent de cette probabilité.

□ **Exercice 24** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, avec $0<p<1$.
On pose $q=1-p$ et on note α un réel strictement positif et différent de 1.
L'objet de cet exercice est de calculer la probabilité que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha X_n}$ soit convergente, c'est-à-dire de calculer la probabilité de l'événement :

$$A=\left\{\omega\in\Omega\ ;\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}\ \text{converge}\right\}$$

1) Calculer la probabilité de A lorsque $\alpha>1$.
On suppose désormais que $\alpha\in\,]0,1[$; on pose $\beta=1-\alpha$.

2) a) Montrer que pour tout k de $\mathbf{N}$, on a :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n\geqslant n^\beta)\Big)\leqslant\sum_{n=k}^{\infty}q^{n^\beta-1}$$

b) Étudier la convergence de la série de terme général $q^{n^\beta-1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}(X_n\geqslant n^\beta)\Big)$.

d) En déduire que $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}(X_n\geqslant n^\beta)\Big)\Big)=0$.

Dans la suite de l'exercice, on note :

$$A_\beta=\left\{\omega\in\Omega\ ;\ X_n(\omega)\geqslant n^\beta\ \text{pour un nombre fini de valeurs de } n \text{ uniquement}\right\}$$

3) a) Montrer que $A_\beta=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}(X_n<n^\beta)\Big)$.

b) Montrer que $\mathbf{P}(A_\beta)=1$.

4) a) Montrer que pour tout $\omega\in A_\beta$, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ est divergente.

b) En déduire la probabilité de l'événement A.

□ **Exercice 25** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Pour $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$. Montrer que $p=1/2$ si et seulement si, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ et tout $k\in\mathbf{Z}$, $\mathbf{P}(S_{2n}=k)\leqslant\mathbf{P}(S_{2n}=0)$.

□ **Exercice 26** Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, avec $p\in\,]0,1[$.

1) Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Donner la loi de $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

2) Déterminer un équivalent de $\max\{\mathbf{P}(S_n=k),\ k\in\mathbf{N}\}$ lorsque $n\to+\infty$.

□ **Exercice 27** Soit n un entier de $\mathbf{N}^*$.

1) On note F_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ qu'on munit de la loi uniforme. On choisit au hasard une de ces permutations, et on définit la variable aléatoire Y_n égale au nombre de points fixes de cette permutation.

   a) Montrer que le nombre d'éléments de F_n n'admettant aucun point fixe vaut :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   b) Déterminer la loi de Y_n.

   c) Soit $k \in \mathbf{N}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(Y_n = k)$.

2) On note E_n l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. On choisit au hasard une de ces applications, et on définit la variable X_n égale au nombre de points fixes de cette application.

   a) Déterminer la loi de X_n.

   b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$.

□ **Exercice 28** Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Notons, pour tout k, F_k la fonction de répartition associée à X_k définie par $F_k : n \mapsto \mathbf{P}(X_k \leqslant n)$. On note $X = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1) Montrer que $F_X = \prod\limits_{k=1}^{n} F_k$ et $F_Y = 1 - \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - F_k)$.

2) Soient $x, y \in \mathbf{R}$ avec $y < x$. Montrer que $\mathbf{P}(y < Y \leqslant X \leqslant x) = \prod\limits_{k=1}^{n} \big(F_k(x) - F_k(y)\big)$.

3) Supposons que les X_k suivent des lois géométriques de paramètre $p_k \in]0,1[$. Déterminer la loi de Y.

□ **Exercice 29** Une suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières est dite *transiente* si, pour toute partie bornée A de $\mathbf{Z}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_n \in A) < +\infty$.

1) Soient $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $X_i \sim \mathscr{P}(\alpha/i)$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, quelle est la loi de $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$? La suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle transiente ?

2) Soient $p \in]0,1[$ et $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telles que, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = 1 - p$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle transiente ?

□ **Exercice 30** Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. On suppose que $\mu = \dfrac{\ln 2}{|\ln q|}$ n'est pas un entier.

1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. Montrer qu'il existe un unique entier m tel que $\mathbf{P}(X \geqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X \leqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

2) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p. On pose $Y_n = \mathbf{1}_{X_n \geqslant m}$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_{2n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que $\mathbf{P}(S_n \geqslant n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

CHAPITRE 9

Réduction II

1 Applications du cours

A Réduction de matrices de petite taille

□ **Exercice 1** Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Étudier la diagonalisabilité de A, puis la « trigonaliser par blocs ».

□ **Exercice 2** Soit $a \in \mathbf{R}$. On note $M(a) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice comportant des a sur la diagonale principale, et des 1 ailleurs.

1) Calculer $\det(M(a))$.
2) Déterminer les éléments propres de A, son polynôme minimal ainsi que son rang en fonction de a.

B Polynômes d'endomorphismes

□ **Exercice 3** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme minimal et exprimer, pour tout entier naturel n, A^n en fonction de I_3, A et A^2.

□ **Exercice 4** Calculer les polynômes minimaux de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 5** Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ irréductible. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$–espace vectoriel de dimension finie tel que $P(u) = 0$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}(u^k / k \in \mathbf{N})$.

□ **Exercice 6** Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

1) Trouver une condition nécéssaire et suffisante pour que $\lambda f + \mathrm{id}$ soit inversible.
2) Dans le cas où elle est inversible, qu'apporte la condition $f \circ f = f$?

□ **Exercice 7** Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}[X])$ défini par $u : P \mapsto XP$.
Déterminer l'idéal annulateur de u.

□ **Exercice 8** Soit A une matrice carrée d'ordre n réelle qui vérifie :
$\begin{cases} A^3 + A^2 + A - 3I = 0 \\ A^3 + 2A^2 - 2A - I = 0 \end{cases}$
Déterminer A.

□ **Exercice 9** Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $A^p = I_n$. Démontrer que A est diagonalisable. Est-ce encore vrai si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$?

□ **Exercice 10** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un automorphisme de E. Montrer que f^{-1} est un polynôme en f.

C Sous-espaces stables

□ **Exercice 11** Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f$.
Soit F sous-espace vectoriel de E stable par f, montrer que $F = F_0 \oplus F_1 \oplus F_{-1}$, avec F_0, F_1, F_{-1} des sous-espaces vectoriels des sous-espaces propres de f.

D Matrices définies par blocs

□ **Exercice 12** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0_n & A \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{C})$

1) Montrer que A et B ont même spectre.
2) Exprimer B^p en fonction de A^p.
3) Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Exprimer $P(B)$ en fonction de A et P.
4) Déterminer une condition nécéssaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable

□ **Exercice 13** Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & A \end{array}\right)$

1) Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.
2) Calculer B^p pour $p \in \mathbf{N}^*$
3) Donner une condition nécéssaire et suffisante pour B soit diagonalisable.

E Calculs de puissances

□ **Exercice 14** Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer M^2.
2) Déterminer $P \in \mathbf{R}_2[X]$ tel que $P(M) = 0$.
3) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P ($n \geqslant 1$).
4) Expliciter M^n ($n \geqslant 1$).

□ **Exercice 15** Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ de $\begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$, $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

F Commutants, racines

□ **Exercice 16** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2) Montrer que A est semblable à : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Montrer que si $M^2 = A$, alors $AM = MA$ ($M \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$).

4) Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ telles que : $M^2 = A$.

□ **Exercice 17** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres distinctes.

1) Déterminer son commutant, c'est à dire $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AM = MA$.

2) Montrer qu'il est égale à l'algèbre des polynômes en A, dont on précisera la dimension.

2 Exercices plus élaborés

A Réduction de matrices de petite taille

□ **Exercice 18** Soient $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$; on pose :

$$C_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots - & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) La matrice J est-elle diagonalisable ? Donner ses éléments propres ? Calculer J^k, $k \in \mathbf{N}$.

2) Montrer que C_n s'exprime comme un polynôme en J, qu'elle est diagonalisable et donner ses éléments propres. En déduire son déterminant.

3) Calculer $\det(A_n)$.

□ **Exercice 19** On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étudier la diagonalisablité de A et déterminer ses éléments propres.
On pourra proposer plusieurs méthodes

B Matrices et endomorphismes nilpotents

□ **Exercice 20** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que

$$(M \text{ est nilpotente}) \iff (\forall k \geqslant 1, \operatorname{tr}(M^k) = 0)$$

Pour le sens $\boxed{\Leftarrow}$ on pourra, au choix,

- commencer en trigonalisant M
- utiliser le théorème de Cayley-Hamilton

C Polynômes d'endomorphismes

□ **Exercice 21** Soit α un réel non nul, u, v, f trois endomorphismes de E tels que :

$$f = \alpha\, u + \frac{1}{\alpha}\, v \ , \ f^2 = \alpha^2\, u + \frac{1}{\alpha^2}\, v \ , \ f^3 = \alpha^3\, u + \frac{1}{\alpha^3}\, v$$

Montrer que f est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres possibles.

□ **Exercice 22** (Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton)

1) Si $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$, on note :

$$C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

Une matrice de ce type sera dite de type **compagne**.

a) Déterminer $\chi_C(X)$.

b) Soit v l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ est C. Montrer que $\chi_v(v) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{K}^n)}$ (on pourra montrer que $\chi_v(v)$ annule la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$, en commençant par montrer que $\chi_v(v)(\varepsilon_1) = 0_{\mathbf{K}^n}$, puis en en déduisant les $n-1$ dernières images).

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on veut montrer que $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$.

a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{k-1}(x))$ soit libre et que la famille $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{k-1}(x), u^k(x))$ soit liée.

b) Utiliser ce qui précède pour écrire la matrice de u dans une base intéressante et en déduire que $\chi_u(u)(x) = 0_E$.

c) Conclure.

□ **Exercice 23** Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer que :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff (u^2 \text{ est diagonalisable et } \operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)).$$

Le résultat est-il encore vrai sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 24** Résoudre l'équation d'inconnue $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$: $A^4 = A$ et $\operatorname{tr}(A) = n$.

□ **Exercice 25** Trouver toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $M^3 - 2M^2 + M = 0$ et $\operatorname{tr}(M) = 0$.

□ **Exercice 26** Trouver toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $M^2 = M^5$ et $\operatorname{tr}(M) = n$.

D Sous-espaces stables

□ **Exercice 27** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1) Montrer que le polynôme caractéristique de A divise tous les polynômes annulateurs de A.
2) Montrer que $\mathbf{R}[A] = \{P(A)\ ,\ P \in \mathbf{R}[X]\}$ est de dimension finie et en trouver une base explicite.
3) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est de dimension supérieure ou égale à 3.
4) Montrer que : (l'endomorphisme f canoniquement associé à A stabilise le plan d'équation $ax + by + cz = 0$) si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A^\top$.
5) Trouver explicitement les plans que f stabilise.
6) Trouver les projecteurs sur les espaces de dimension 1 ou 2 qui commutent avec A.

□ **Exercice 28** Déterminer les sous-espaces de $\mathbf{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice canonique : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 29**

1) Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ est trigonalisable.
2) Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et soit $D : u \in E \mapsto D(u) = u'$
   Déterminer tous les sous-espaces vectoriels F de E de dimension 2 tels que $D(F) \subset F$

□ **Exercice 30** Soit $A \in \mathscr{M}_{3n}(\mathbf{R})$, telle que $\mathrm{rg}(A) = 2n$ et $A^3 = -A$.

Montrer que 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité n de A, et que A est semblable à la matrice définie par blocs : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

On pourra commencer par décomposer $\mathbf{R}^{3n} = F \oplus G$ avec F et G stables par u (endomorphisme canoniquement associé à A), et $u_G^2 + id_G = 0$.

□ **Exercice 31** Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que $E = \{P(u)(x_0),\ P \in \mathbf{K}[X]\}$.
On dit alors que u est un endomorphisme cyclique et que x_0 est un vecteur u-générateur de E.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On pose $I = \{P \in \mathbf{K}[X],\ P(u)(x_0) \in F\}$.

1) Montrer que $F = \{P(u)(x_0),\ P \in I\}$
2) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $I = \{QR,\ R \in \mathbf{K}[X]\}$.
3) Montrer que Q divise χ_u.

Réciproquement, pour S un diviseur de χ_u, on pose $A_S = \{(SR)(u)(x_0),\ R \in \mathbf{K}[X]\}$.

4) Montrez que pour tout diviseur S de χ_u, A_S est un sous-espace vectoriel de E qui est stable par u.
5) En déduire qu'un sous-espace vectoriel est stable par u si et seulement s'il est de la forme $\mathrm{Ker}(T(u))$ avec $T|\chi_u$.
6) Application : déterminer les sous-espaces stables stables par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice réelle $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

E Divers

□ **Exercice 32** Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E. Soit a dans E. On suppose quil existe p entier naturel non nul tel que $f^p(a) \neq 0$ et $f^{p+1}(a) = 0$.

1) Montrer que : $p \leqslant n-1$.
2) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

□ **Exercice 33** Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.

1) Montrer que : $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
2) Montrer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est tel que : $AM = MB$, alors $M = 0$.
3) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$; montrer qu'il existe un unique $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $AX - XB = M$.

□ **Exercice 34** Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $a \in \mathbf{R}^*$ tels que : $M^\top = M^{-1} + aI_n$.

1) Déterminer un polynôme annulateur de M.
2) Montrer que M est diagonalisable.
3) Que dire des valeurs propres de M ?

□ **Exercice 35** Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ telles que $f^2 = g^2 = -\mathrm{id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1) Démontrer que f et g sont des automorphismes.
2) Démontrer que f et g ont mêmes valeurs propres, de mêmes ordres de multiplicité.

□ **Exercice 36** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$.

1) Montrer que pour toutes matrices carrées $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\chi_{MN} = \chi_{NM}$. En déduire que $\chi_{A\bar{A}}$ est à coefficients réels.
2) Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A\overline{A}) \cap \mathbf{R}_-^*$.
   a) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre de $A\overline{A}$ associé à λ. Montrer que $Y = A\overline{X}$ est un vecteur propre de $A\overline{A}$ associé à λ, et que la famille (X, Y) est libre.
   b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $X \in \mathrm{Ker}((A\bar{A} - \lambda I)^k)$ et $Y = A\overline{X}$. Montrer que $Y \in \mathrm{Ker}((A\bar{A} - \lambda I)^k)$.
   c) En généralisant le raisonnement de la question i), montrer qu'il existe des vecteurs $X_1, \ldots, X_p \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tels que posant $Y_1 = \bar{A}X_1, \ldots, Y_p = \bar{A}X_p$, la famille $(X_1, \ldots, Y_p)$ soit une base du sous-espace caractéristique $F = \mathrm{Ker}((A\bar{A} - \lambda I)^n)$.
   On pourra construire les X_i de proche en proche et de sorte que la matrice dans la base $(X_1, \ldots, Y_p)$ de l'endomorphisme de F induit par l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ canoniquement associé à $A\bar{A}$ soit triangulaire supérieure.
3) Montrer que $\det(I_n + A\overline{A}) \geqslant 0$.

F Commutants, racines

□ **Exercice 37** Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Prouver que si u et v sont deux endomorphismes de E diagonalisables qui commutent alors ils admettent une base commune de vecteurs propres.

□ **Exercice 38** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ distinctes, d'ordre de multiplicité respectifs $r_1, \cdots, r_p$.

1) Montrer que A peut s'écrire : $A = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k P_k$, avec $(P_1, \cdots, P_p)$ une famille de matrices de projections telles que :
$$\forall (i,j) \in [\![1 ; p]\!]^2 \quad , \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i$$

2) Soit $\mathbf{R}[A] = \{P(A)/P \in \mathbf{R}[X]\}$; quelle est la dimension de $\mathbf{R}[A]$? Déterminer une base de $\mathbf{R}[A]$ dans laquelle les polynômes sont tous de degré $p-1$.
Montrer que les projecteurs ci-dessus sont des polynômes en A.

3) Soit $C_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})/MA = AM\}$ (commutant de A). Montrer que la dimension du commutant de A est $\sum_{k=1}^{p} r_k^2$.

□ **Exercice 39** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer le commutant de A puis résoudre $X^n = A$, avec $n \in \mathbf{N}^*$.

□ **Exercice 40** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que cette matrice soit diagonalisable. Donner, dans ce cas, ses éléments propres.
2) Déterminer, en discutant sur a, le commutant de A. Quelle est sa dimension ?
3) Déterminer les matrices $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $X^2 = A$.
4) Déterminer le polynôme minimal de l'idéal annulateur de A, en discutant toujours sur a.

□ **Exercice 41** Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1) Soit $D \in E$ une matrice diagonale dont les éléments sont distincts deux à deux. Trouver toutes les matrices qui commutent avec D
2) Soit $A \in E$ une matrice admettant n valeurs propres distinctes, et soit $B \in E$ telle que $B^2 = A$. Montrer que B est diagonalisable.
3) Trouver les matrices B telles que $B^2 = A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -5 \\ 5 & -3 & 3 \\ -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

□ **Exercice 42** Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ telles que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 43** Résoudre l'équation $X^2 = A$, où X est inconnu dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

On pourra commencer par montrer que A est semblable à : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

□ **Exercice 44** Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les éléments propres de A.
2) Déterminer les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $B^3 = A$.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 45** Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$

1) Calculer B^p pour $p \in \mathbf{N}^*$
2) Montrer que si B est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
3) On suppose que A est diagonalisable ; comparer les valeurs propres de A et de B, leur ordre de multiplicité, la dimension des sous-espaces propres.
4) Conclure.

□ **Exercice 46** Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisables. Montrer qu'elles ont mêmes sous-espaces propres si et seulement s'il existe deux polynômes Q et R de $\mathbf{R}[X]$ tels que : $A = Q(B)$ et $B = R(A)$.

CHAPITRE 10

Espaces vectoriels normés I

1 Applications du cours

A Manipulations sur les normes

□ **Exercice 1** Soit $\|\ \|$ une norme sur un espace vectoriel normé E, soient $(a,b) \in E \times E$, soient $r,s > 0$. Déterminer une CNS sur a,b,s,r pour que $B_f(a,r) \subset B_f(b,s)$.

□ **Exercice 2** Soit E un espace vectoriel normé. Soit l'application : ($\|\ \|$ est une norme sur E)

$$\begin{array}{rccl} T: & E & \longrightarrow & E \\ & u & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} u & \text{si } \|u\| \leqslant 1 \\ \frac{u}{\|u\|} & \text{si } \|u\| \geqslant 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Montrer que : $\forall\,(u,v) \in E\ ,\ \|T(u)-T(v)\| \leqslant 2\|u-v\|$.

B Comparaisons de normes

□ **Exercice 3** Montrer que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.

□ **Exercice 4** Montrer que $f \mapsto \|f'\|_\infty$ et $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ sont deux normes sur $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R}) / f(0) = 0\}$ et qu'elles sont équivalentes.

□ **Exercice 5** Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. On définit sur E une norme N en posant :

$$\forall\, f \in E\ ,\ N(f) = \int_0^1 e^t |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

1) Vérifier que N est bien une norme et la comparer à la norme infinie. Trouver une suite de E convergente pour N et pas pour la norme infinie. Qu'en déduit-on ?
2) Comparer N à la norme $\|\ \|_1$.

□ **Exercice 6** Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ et N_1 et N_2 les applications définies sur E par :

$$\forall\, f \in E\quad ,\quad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } N_2(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Montrer que ce sont des normes sur E, les comparer ; sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 7** Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R}) / f(0) = 0\}$ et N_∞ et N'_∞ les applications définies sur E par :

$$\forall\, f \in E \quad , \quad N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ et } N'_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

Montrer que ce sont des normes sur E, les comparer ; sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 8** Soit $E = \ell^1(\mathbf{K}) = \{(u_n) / \sum (u_n) \text{ est absolument convergente}\}$.

Si $u = (u_n) \in E$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, et $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.
Montrer que ce sont deux normes sur E, et les comparer.

□ **Exercice 9** Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$; on définit $\|\ \|$ sur E par :

$$\forall\, f \in E \quad , \quad \|f\| = \int_0^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$$

1) Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur E
2) Comparer $\|\ \|$ et N_1 (norme de la convergence en moyenne sur E) ; sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 10** Sur $\mathbf{C}[X]$, on pose, si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $\|P\|_2 = (\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2)^{1/2}$, $\|P\|_\infty = \max\{|a_k|; k \in [0,n]\}$ ($n = \deg(P)$). Prouver que ces trois applications définissent des normes sur $\mathbf{C}[X]$, qu'elles vérifient $\|.\|_\infty \leqslant \|.\|_2 \leqslant \|.\|_1$, mais qu'elles ne sont pas équivalentes.

□ **Exercice 11** Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$; pour $P \in E$, on pose :

$$N_1(P) = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \quad , \quad N_2(P) = \int_0^\pi |P(\cos(t))|\, \mathrm{d}t$$

Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 12** Soit E l'espace vectoriel des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées et telles que $u_0 = 0$.
On définit N_∞ et N par : $\forall u \in E$, $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, $N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1) Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E.
2) Montrer qu'il existe $k \in]0,+\infty[$ tel que : $\forall\, u \in E$, $N(u) \leqslant k\, N_\infty(u)$; quel est le plus petit k possible ?
3) Les normes N et N_∞ sont-elles équivalentes ?

□ **Exercice 13** Soit E est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications bornées de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, muni de $\|\ \|_\infty$; A est la partie de E constituée des applications continues sur $[0,1]$.

$$f_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$$

soit
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 & \text{si} \quad x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Calculer $d(f_0, A)$.

□ **Exercice 14** Soit $N : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$.

$$(x,y) \longmapsto N(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |tx + y|$$

1) L'application N est-elle une norme sur $\mathbf{R}^2$?
2) Tracer la boule unité.
3) Trouver $\alpha, \beta > 0$ les meilleurs possibles tels que :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ , \ \alpha\sqrt{x^2+y^2} \leqslant N(x,y) \leqslant \beta\sqrt{x^2+y^2}$$

C Applications linéaires lipschitziennes

□ **Exercice 15** On munit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\ \|$ définie sur E par :

$$\forall\, A \in E, \|A\| = \sup_{i \in [\![1,n\mathrm{id}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Soit $f : E \to \mathbf{C}$ définie par $f : A \mapsto \mathrm{tr}(A)$. Montrer que f est lipschitzienne et calculer sa norme subordonnée .

□ **Exercice 16** On munit $\mathbf{R}^2$ de la norme $\|.\|_\infty$, $\mathbf{R}^3$ de la norme $\|.\|_1$ et on considère l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques respectives. Vérifier qu'elle est lipschitzienne et calculer sa norme subordonnée .

□ **Exercice 17** On munit $\mathbf{C}^n$ de la norme N_∞ ; soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, soit a l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ qui lui est canoniquement associé.
Déterminer la norme subordonnée pour a. Même question en munissant $\mathbf{C}^n$ de la norme N_1.

□ **Exercice 18** Soit $\mathscr{C}$ l'espace des suites réelles convergentes muni de la norme

$$\|u\| = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$$

Soit $L : \mathscr{C} \to \mathbf{R}$ l'application qui associe à une suite u sa limite.
Montrer que L est lipschitzienne et calculer sa norme subordonnée.

□ **Exercice 19** Dans $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, on considère les normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_1$ (normes de la convergence uniforme et de la convergence en moyenne, respectivement).
On note $E_\infty = (E, \|\ \|_\infty)$ et $E_1 = (E, \|\ \|_1)$.
Soit φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall\, f \in E\ ,\ \ \forall\, x \in [0,1]\ ,\ \ \varphi(f)(x) = \int_0^x t f(t)\, \mathrm{d}t$$

Vérifier que les applications linéaires suivantes sont lipschitziennes et calculer leur norme subordonnée.

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} E_\infty & \longrightarrow & E_\infty \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}, \qquad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} E_\infty & \longrightarrow & E_1 \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}$$

$$\varphi_3 : \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E_\infty \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}, \qquad \varphi_4 : \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E_1 \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}$$

□ **Exercice 20** Soit $E = C([0,1], \mathbf{R})$, muni de la norme $\|\ \|_\infty$. On considère φ définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\, \mathrm{d}x \end{array}.$$

Est-elle lipschitzienne sur E ? Si oui, calculer sa norme subordonnée .

□ **Exercice 21** Soit $E = \mathbf{R}[X]$, a un réel donné.

1) On définit $\|\ \|$ par : $\forall P \in E$, $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$. Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur E.

2) Soit $\varphi : E \to \mathbf{R}$ l'application définie par $\varphi : P \mapsto P(a)$.
L'application φ est-elle lipschitzienne sur E ?

□ **Exercice 22** On pose $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$ muni de la norme infini, et $f \in E$. On définit :

$$T : f \longmapsto g = T(f) \quad , \quad \forall x \in [0,1] \quad , \quad g(x) = \int_0^1 \inf(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y$$

1) Montrer que T est un endomorphisme de E.
2) T est-il lipschitzien ?
3) T est-il injectif ? est-il un automorphisme de E ?
4) Déterminer les éléments propres de T.

D Suites de matrices

□ **Exercice 23** Déterminer $\lim_{n\to+\infty} A^n$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 24** Déterminer si elle existe $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{A}{4}\right)^n$ où $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{A^n}{n4^n}\right)$

□ **Exercice 25** Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1 : \lim_{n\to+\infty} A_n = A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{R}) \\ 2 : \text{ pour tout } n,\ A_n \text{ est inversible} \\ 3 : \lim_{n\to+\infty} A_n^{-1} = B \in \mathscr{M}_p(\mathbf{R}). \end{cases}$$

1) Montrer que A est inversible et $A^{-1} = B$.
2) Peut-on retirer la propriété 3 ?

□ **Exercice 26** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ telle que : $\forall X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, $G_X = \{A^n X / n \in \mathbf{N}\}$ est bornée. Montrer que : $|\mathrm{tr}(A)| \leqslant 2$.

□ **Exercice 27** On peut éventuellement s'aider de Python.
On donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A et B sont semblables.
2) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n}.$$

□ **Exercice 28**

1) Soit (λ_n) et (μ_n) deux suites complexes. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = (X - \lambda_n)(X - \mu_n) = (X^2 - s_n X + p_n)$. On suppose que (s_n) et (p_n) converge vers des limites s et p vérifiant $s^2 = 4p$. Montrer que les suites (λ_n) et (μ_n) sont bornées, et en déduire qu'elles convergent.

2) Soit $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et si $t \neq 0$

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 + t\cos\frac{2}{t} & -t\sin\frac{2}{t} \\ -t\sin\frac{2}{t} & 1 - t\cos\frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de M_t. Etudier leur comportement lorsque t tend vers zéro.

3) Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbf{C})$ convergeant vers une matrice A.
Montrer que l'ensemble des valeurs propres des matrices A_n quand n décrit $\mathbb{N}$ est borné.

2 Exercices plus élaborés

A Manipulations sur les normes

□ **Exercice 29** Soit $\|\ \|$ une norme sur un espace vectoriel normé E ; montrer que :

1) $\forall\ (x,y,z,t) \in E\times E\times E\times E$,
$\|x-y\| + \|z-t\| + \|x-z\| + \|y-t\| \geqslant \|x-t\| + \|y-z\|$.

2) $\forall\ (x,y,z) \in E\times E\times E$,
$x+y+z=0 \Rightarrow \|x-y\| + \|y-z\| + \|z-x\| \geqslant \frac{3}{2}(\|x\| + \|y\| + \|z\|)$

3) $\forall\ (x,y) \in (E\backslash\{0\})^2$, $\|x-y\| \geqslant \frac{1}{2}\sup(\|x\|,\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|$.

□ **Exercice 30** Montrer que $N : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $N(x,y) = \displaystyle\int_0^1 |x+ty|\,\mathrm{d}t$ est une norme et représenter sa boule unité fermée.

B Comparaisons de normes

□ **Exercice 31** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonalisable.
On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ tel que : $\forall \alpha \in \mathrm{Sp}(M)\backslash\{\lambda\}$, $|\lambda| > |\alpha|$.
Déterminer un équivalent simple de M^p quand p tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire une suite de matrices (A_p) telle que $M^p = A_p + \|A_p\|\varepsilon_p$ où (ε_p) est une suite de matrices convergeant vers la matrice nulle $n\times n$).

□ **Exercice 32** Montrer que l'application $\|\ \| : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par : $\|(x,y)\| = \sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\frac{x+ty}{1+t^2}\right|$ est une norme sur $\mathbf{R}^2$. La comparer le plus finement possible avec la norme euclidienne.
Représenter graphiquement la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.

□ **Exercice 33** Si $P \in E = \mathbf{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$ et $N_2(P) = \int_2^3 |P(t)|\,\mathrm{d}t$

1) Les applications N_1 et N_2 sont-elles des normes sur E ? Si oui, sont-elles équivalentes ?

2) L'application $\psi : P \in \mathbf{R}[X] \mapsto \psi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle lipschitzienne au sens de N_1 ? au sens de N_2 ?

□ **Exercice 34** On note $E = \mathscr{C}^1([0,1];\mathbf{R})$. On pose

$$N : f \in E \mapsto \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'application N est-elle une norme ? Si oui, est-elle équivalente à la norme de la convergence uniforme ?

□ **Exercice 35** Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbf{R}^2$; montrer que : N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall\, r > 0\ ,\ \exists\, s > 0\ ,\ B^{N_1}(0,s) \subset B^{N_2}(0,r) \\ \forall\, r > 0\ ,\ \exists\, s > 0\ ,\ B^{N_2}(0,s) \subset B^{N_1}(0,r) \end{cases}$$

□ **Exercice 36** Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$, et soit g donnée dans E. Pour tout f dans E, on définit $N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)g(x)|$.

1) Déterminer une CNS sur g pour que N soit une norme sur E.
2) On suppose que : $\forall\, x \in [0,1]$, $g(x) \neq 0$; montrer que N et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes.

C Applications linéaires lipschitziennes

□ **Exercice 37** Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$. Pour P élément de E, on pose $\|P\| = |P(0)| + |P(1)| + |P(2)| + |P(3)|$.

1) Démontrer que $\|.\|$ est une norme sur E.
2) Soit φ l'application de E dans E définie par $\varphi(P)(X) = P(X+2)$. Vérifier que φ est linéaire lipschitzienne et calculer sa norme subordonnée $||\varphi||_{\text{op}}$.

□ **Exercice 38** On munit $E_k = \mathbf{R}_k[X]$ de la norme $\|P\|_k = \sum_{i=0}^{k} |P(i)|$.

Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi\ : & E_2 & \longrightarrow & E_3 \\ & P & \longmapsto & X^2P' \end{array}$$

Vérifier que φ est linéaire lipschitzienne et calculer sa norme subordonnée $||\varphi||_{\text{op}}$.

□ **Exercice 39** On pose $E = \{f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R}) / f(0) = 0\}$ et on le munit de la norme $\|\ \|_\infty$.
Pour $n \geqslant 1$, on définit :

$$\begin{array}{rccc} T_n\ : & E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f\left(\frac{1}{n}\right) \end{array}$$

1) Montrer que T_n est lipschitzienne sur E.
2) Calculer sa norme subordonnée $||T_n||_{\text{op}}$.
3) La suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente dans $\mathscr{L}_c(E,\mathbf{R})$?

□ **Exercice 40** Soit C l'espace vectoriel des suites complexes convergentes, C_0 le sous-espace de C des suites de limite nulle. Sur ces deux espaces vectoriels on considère la norme infinie :

$$\forall (x_n) \in C, ||(x_n)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

Pour $x = (x_n) \in C$, on note $\ell(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n$.
On considère $T : C \to C_0$ défini par

$$T : x \mapsto (\ell(x), x_0 - \ell(x), x_1 - \ell(x), \cdots, \cdots)$$

1) Montrer que T est bien définie, linéaire, bijective et que T et T^{-1} sont linéaires et lipschitziennes.
2) Calculer les normes subordonnées $||T||_{\text{op}}$ et $||T^{-1}||_{\text{op}}$.

□ **Exercice 41** Soit $E = (\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R}), \|.\|_\infty)$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} f\left(\tfrac{1}{n}\right) \end{array}$$

Démontrer qu'elle est linéaire, lipschitzienne et calculer la norme subordonnée $||\varphi||_{\text{op}}$.
Peut-on trouver une fonction f telle que $\frac{||\varphi(f)||_\infty}{||f||_\infty} = ||\varphi||_{\text{op}}$?

D Suites de matrices

□ **Exercice 42** Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ (α est un réel).

□ **Exercice 43** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On définit la suite de matrices (A_n) par : $A_0 = A$, et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $A_n = \frac{1}{2}\left(A_{n-1} + 3(A_{n-1})^{-1}\right)$

1) Diagonaliser A_0.
2) Montrer que A_n est définie pour tout n.
3) Montrer que la suite (A_n) converge et déterminer sa limite.

□ **Exercice 44** Soit $R_n \in \mathbf{R}_3[X]$ le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par X^4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R_n}{n^3}$.

□ **Exercice 45** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que la suite $(A^p)_{p\in\mathbf{N}}$ admet une limite $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Déterminer A et L.

□ **Exercice 46** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$, $p \geqslant 2$. On dira que A est la matrice bande $[-1, 3, -1]$.

Le but de cet exercice est de mettre en place une méthode itérative de résolution approchée d'un système linéaire, en utilisant un "schéma de point fixe" (on écrit un système équivalent dont la solution est le point fixe d'une application, qu'on approche à l'aide d'une suite récurrente).

1) Démontrer que cette matrice est inversible. On note X^* l'unique solution du système linéaire $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$: $X^* = A^{-1}B$.
   Le système $AX = B$ est équivalent au système $X = CX + \frac{1}{3}B$ avec C matrice bande à préciser.
   Soit T l'application de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^p$ définie par $X \longmapsto CX + \frac{1}{3}B$. Quel est le vecteur $T(X^*)$?
2) Question à résoudre avec Python : on suppose ici p=5.
   Construire les matrices A, C, le vecteur B, et la transformation T.
   Confirmer l'inversibilité de A. Expliciter alors X^*, puis une valeur approchée de ce vecteur.
   Vérifier la valeur attendue pour $T(X^*)$.
3) On munit $\mathbf{R}^p$ de la norme $\|\ \|_\infty$ associée à la base canonique. Montrer alors que T est $k-$lipschitzienne avec une constante $k \in]0, 1[$ à préciser.
   Montrer qu'en partant d'un vecteur X_0 arbitraire, la suite (X_n) définie par la récurrence $X_{n+1} = TX_n$ (pour tout naturel n) converge vers X^*
4) A partir d'une majoration de $\|X_{n+1} - X_n\|_\infty$, puis de $\|X_{n+p} - X_n\|_\infty$ à l'aide de $\|X_1 - X_0\|_\infty$, établir la formule : $\|X^* - X_n\|_\infty \leqslant \frac{k^n}{1-k}\ \|X_1 - X_0\|_\infty$.
5) On choisit $X_0 = 0$. Soit $\varepsilon = 10^{-2}$; avec Python, construire les termes de la suite (X_n) nécessaires pour obtenir une valeur approchée de X^* à ε près. (au sens de $\|\ \|_\infty$).
   On pourra choisi d'écrire une procédure ou non. Comparer avec la valeur approchée de X^* lorsque $p = 5$.

CHAPITRE 11

Séries entières

1 Applications du cours

A Rayon de convergence

□ **Exercice 1** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum_{n\geqslant 0} (3n^2+2n)\,x^n$ b) $\sum_{n\geqslant 0} (2^n+3^{n+1})\,x^n$

c) $\sum_{n\geqslant 0} n^n x^n$ d) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^n} x^n$

e) $\sum_{n\geqslant 1} \arctan(n^\alpha) x^n$ où $\alpha \in \mathbf{R}$ f) $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1} x^n$

g) $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) x^n$ h) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} x^n$

i) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{sh}(n)}{\mathrm{ch}^2(n)} x^n$ j) $\sum_{n\geqslant 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} x^n$

□ **Exercice 2** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ dans les cas suivants

1) pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{\mathrm{ch}(n)}{n}$ si n est pair et $\frac{\mathrm{sh}(n)}{n}$ si n est impair

2) pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

3) pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx$.

□ **Exercice 3** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ avec

$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, et étudier la convergence en R et en $-R$.

□ **Exercice 4** Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n|\, z^n$ ont même rayon de convergence.

□ **Exercice 5** On suppose que $\sum a_n z^n$ a pour rayon $R > 0$. Quel est celui de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

□ **Exercice 6** (Série entière qui ne converge ni normalement ni uniformément sur $D(0,R)$) :

1) cas R fini, $R>0$: étudier la convergence normale puis uniforme de $\sum (x \longmapsto x^n)$ sur $]-1,1[$.

2) cas $R=+\infty$: étudier la convergence normale puis uniforme de $\sum \left(x \longmapsto \frac{x^n}{n!}\right)$ sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 7** Soit $a \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$. Convergence et somme de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{(\sin a)^n} \frac{x^n}{n!}$.

□ **Exercice 8** Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum (d_n x^n)$ avec :

1) d_n est le nombre de diviseurs de n.
2) d_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de π.

□ **Exercice 9** On pose pour tout entier naturel k : $u_k = \frac{1}{k^2+1}$.

1) Justifier que $\sum \frac{1}{k^2+1}$ est convergente, on pose $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

2) Déterminer le rayon de convergence de $\sum (a_n x^n)$

B Calculs de sommes

□ **Exercice 10** Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-3}{(n-1)!} x^n$.

□ **Exercice 11** Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

1) Déterminer pour quelles valeurs de x les deux séries ci-dessus sont convergentes.
2) Calculer $f(x)$.

□ **Exercice 12** Déterminer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^n$.

□ **Exercice 13** On pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

1) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2) Montrer que f est continue sur D.
3) Calculer $f(x)$ sur cet ensemble.
4) Déterminer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.

□ **Exercice 14** Rayon de convergence et somme de la série entière : $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

□ **Exercice 15** On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch}(n)}{n} x^n$.

Calculer son rayon de converge et sa somme $S(x)$ pour x dans l'intervalle ouvert de convergence.

□ **Exercice 16** On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1} x^n$.

On note R son rayon de convergence et f sa somme définie sur $]-R,R[$.

1) Montrer que : $\forall x \in]-R,+R[, 2f(x) = (1+4x)f'(x)$.
2) En déduire f.

□ **Exercice 17** Soit a un réel. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \cos(na)\frac{x^n}{n}$, puis calculer sa somme.

□ **Exercice 18** Soit la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$; déterminer son rayon de convergence et sa somme.

□ **Exercice 19** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$.

□ **Exercice 20** Déterminer le rayon de convergence et la somme de : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+2}{n(n+1)}x^n$.

□ **Exercice 21** Déterminer le rayon de convergence et la somme de : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$.

□ **Exercice 22** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

□ **Exercice 23** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+2)2^n}$.

□ **Exercice 24** Convergence et somme de la série entière : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n}$.

Calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n}$.

□ **Exercice 25** On pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Calculer $f(x)$ sur cet ensemble.
3) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

□ **Exercice 26** Soit la série entière $\sum\left(\frac{n!}{1.3.\cdots.(2n+1)}x^{2n+1}\right)$.

1) Déterminer son rayon de convergence.
2) Déterminer sa somme f.
   On pourra chercher une équation différentielle vérifiée par f.

□ **Exercice 27** Convergence et somme de la série entière : $\sum_{n\geqslant 0} (n^2+1)2^{n+1}x^n$.

□ **Exercice 28** Rayon de convergence et somme de la série entière :

$\sum_{n\geqslant 0} (\operatorname{ch}(0) + \operatorname{ch}(1) + \operatorname{ch}(2)\cdots + \operatorname{ch}(n))\, x^n$.

□ **Exercice 29** Soit la suite $a_n = \frac{1}{10} + \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

□ **Exercice 30** On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n(n+2)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2) Calculer $f(x)$ sur D.

□ **Exercice 31** Soit $\theta \in]0, \pi[$, et les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} \sin(k\theta)x^k$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(k\theta)}{k}x^k$

Déterminer leur rayon de convergence et leur somme.

□ **Exercice 32** Soit (a_n) une suite telle que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$.
Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

□ **Exercice 33** Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k+3}\, x^k$ pour $x \in]-1,1[$.

□ **Exercice 34**
Soit la série de fonctions $\sum (u_n)$ où $u_n : x \longmapsto \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{2n+1}}{4n+3}$.

1) Déterminer son domaine de convergence D.
2) Donner une expression simple de f. Déterminer $\ell = \lim_{x\to 1^-} f(x)$.
3) Montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. En déduire $f(1)$.
4) Comparer ℓ et $f(1)$. Cela contredit-il le théorème d'Abel radial ?

C Développements en séries entières

□ **Exercice 35** Soit $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 - 2(\operatorname{ch}\alpha)x + 1}\right)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Développement en série entière de f.

□ **Exercice 36**

1) Rappeler les développements en séries entières de $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \ln(1-x)$.
2) Soit la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)}_{n\geqslant 0}$; déterminer son rayon de convergence et sa somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
3) En déduire la somme pour $x = 1$.

□ **Exercice 37** Développer en série entière en 0 : $x \longmapsto \arctan\left(\frac{2(x+3)}{x-2}\right)$.

□ **Exercice 38** Donner le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto e^x \sin(x)$.

□ **Exercice 39** Former le développement en série entière en 0 de :

1) $x \longmapsto \dfrac{\sin(4x)}{\sin(x)}$ 2) $x \longmapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$ 3) $x \longmapsto \ln\left(\frac{2-x}{3-x^2}\right)$
4) $x \longmapsto \arctan\left(\frac{x\sin a}{1-x\cos a}\right)$, $a \in \mathbf{R}$ 5) $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$, 6) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos(\alpha) + 1}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$

□ **Exercice 40** Développer en série entière en 0 la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(1 + \frac{x^2}{1+x}\right)$.

□ **Exercice 41** Développement en série entière au voisinage de 0 de $x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)$.

□ **Exercice 42** Former le développement en série entière en 0 de :
$x \longmapsto \arctan(x+1)$, $x \longmapsto \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\tan\alpha\right)$, $x \longmapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$.

□ **Exercice 43** Développer en série entière autour de 0 de $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 44** Soit f la fonction de variable réelle x définie par : $f(x) = \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$.
Développer f en série entière à l'origine et déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

□ **Exercice 45** Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Montrer que f est développable en série entière
2) Chercher une équation différentielle vérifiée par f de la forme :
   $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$, où a, b, c sont des fonctions polynômiales.
3) Déterminer le développement en série entière de f.
4) En déduire le développement en série entière de $x \mapsto (\arcsin(x))^2$.

D Études de fonctions définies comme sommes de séries entières

□ **Exercice 46** Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n-1} x^n$

1) Calculer le rayon de convergence R et étudier la nature de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.
2) Calculer la somme de la série.
3) Equivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

□ **Exercice 47** Soit $a \in \mathbf{R}$ tel que $|a| < 1$. Soit $S : [0,1[\to \mathbf{R}$ définie par $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1-x^n}$.

1) Montrer que S est continue sur $[0,1[$.
2) Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 1.

□ **Exercice 48** Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$, où p est un entier naturel.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f.
2) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1.

E Divers

□ **Exercice 49** Soit $\sum (a_n z^n)_{n\in\mathbf{N}}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \geqslant 0$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

i) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge uniformément sur $D(0,R)$.

ii) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D(0,R)}$

iii) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge uniformément sur le cercle $\mathscr{C}(0,R)$

□ **Exercice 50** Montrer que : $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x > \sin(1)$.

□ **Exercice 51** Soit (a_n) une suite bornée de nombres réels. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries entières $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum a_n x^n$? On note f et g leurs sommes respectives.
Soit $x \in]0,1[$.

1) Montrer que $t \mapsto e^{-t/x} f(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$
2) Etablir : $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} f(t)\,\mathrm{d}t = x g(x)$

□ **Exercice 52**

1) Montrer que le prolongement par continuité de $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

2) Même question pour $x \longmapsto \frac{\arctan x}{x}$, et pour $x \longmapsto \frac{\ln x}{x-1}$ sur $]0,+\infty[$.

□ **Exercice 53** Soient deux suites de terme général a_n et b_n réels positifs vérifiant :

$$a_0 = 0 \ , \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \ , \ b_0 = a_0 \ , \ b_1 = a_1 \ , \ \forall\, n \geqslant 2 \ , \ b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k}$$

1) Donner une majoration simple de chacune de ces suites. Qu'en déduit-on pour les rayons de convergence R_a et R_b de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ respectivement ?

2) Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, montrer que :

$$\forall\, z \in \mathbf{C} \ , \ |z| < 1 \Longrightarrow g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)}$$

3) En déduire que la série $\sum b_n$ diverge. Que vaut R_b ?

□ **Exercice 54** (théorème de Liouville)

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1) Montrer que pour tout $r \in]0, R[$ et pour tout naturel n :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta = 2\pi r^n a_n$$

2) Montrer que si $R = +\infty$ et f est bornée sur $\mathbf{C}$, alors f est constante.

F Séries entières et intégrales

□ **Exercice 55** Soit $S(x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$.
Déterminer le rayon de convergence et exprimer S sous forme intégrale.

□ **Exercice 56** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

On pourra utiliser la série entière $\sum \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

□ **Exercice 57** Montrer que : $\forall\, x \in [0,1[$, $\displaystyle\int_0^x \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Montrer par deux méthodes que c'est encore vrai pour $x = 1$.

□ **Exercice 58** Montrer que : $\forall\, x \in [-1,1]$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$

En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

□ **Exercice 59** Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

□ **Exercice 60** Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n\,(4n+1)}$.

□ **Exercice 61** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que a_n existe, et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
2) Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^{2n}$.

□ **Exercice 62** Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t$.

1) Calculer a_n.
2) Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$? Calculer sa somme.

□ **Exercice 63** On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta$. Rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$. Calcul de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n$.
On pourra poser $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

□ **Exercice 64** Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t}{t^2+1}\right)^n \mathrm{d}t$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1) Montrer que S est définie sur $[-2, 2,[$.
2) Exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.

□ **Exercice 65** On pose $u_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-(n-1))\,\mathrm{d}t$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{u_n}{n!}x^n$.

2 Exercices plus élaborés

A Rayon de convergence

□ **Exercice 66** Soit la série entière $\sum (-1)^n \frac{n!}{n^n} x^{3n+1}$

1) Déterminer son rayon de convergence.
2) Etude en $x = R$ et en $x = -R$.

□ **Exercice 67**

1) Justifier la convergence de la série de terme général $u_k = \frac{1}{k(\ln k)^3}$.
2) On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^3}$ pour $n \geqslant 3$.
   Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} a_n x^n$.

B Calculs de sommes

□ **Exercice 68** Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

□ **Exercice 69** Soit la suite (a_n) telle que :
$\forall\, n \in \mathbf{N}$, $a_{n+3} = \frac{11}{6}a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n$, avec $a_0 = 1$, $a_1, a_2 \in]0, +\infty[$ donnés.

1) Soit $A_n = \max\{|a_n|, |a_{n+1}|, |a_{n+2}|\}$.
   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $A_{n+1} \leqslant 3A_n$.

2) Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum (a_n x^n)$?

3) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

4) En déduire a_n en fonction n.

C Développements en série entière

□ **Exercice 70** Soit $f(x) = \int_0^{\pi} \cos(x\cos(t))\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier que f est développable en série entière en 0

2) Déterminer son développement en série entière.

□ **Exercice 71** Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^p$, avec p naturel non nul.
Développer f en série entière en 0.

□ **Exercice 72** Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a,a[$.
On suppose que pout tout $x \in]-a,a[$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

1) Pour tout entier n, on pose $R_n : x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.
Montrer que pour tout couple $(x,y) \in]0,a[^2$,

$$x < y \Rightarrow \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}.$$

On pourra utiliser un changement de variables pour exprimer les intégrales.

2) En déduire que f est la somme de sa série de Taylor sur $[0,a[$ puis sur $]-a,a[$

D Études de fonctions définies comme sommes de séries entières

□ **Exercice 73** Soit (a_n) une suite de réels qui converge vers $a \neq 0$.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n} x^n$.

2) Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} x^n$ pour $x \in]-1,1[$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1.
0n pourra développer $x \longmapsto f(x) + a\ln(1-x)$ *en série entière en* 0.

□ **Exercice 74**

1) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \ln(n) x^n$.

2) Si $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$, montrer que : $S(x) \underset{1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

E Divers

□ **Exercice 75** Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{(n^2)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f ; montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2) Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} x^{(t^2)}\,\mathrm{d}t$. Etudier F et montrer qu'il existe C tel que : $F(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{C}{\sqrt{1-x}}$.

3) En déduire un équivalent de f en 1^-.

□ **Exercice 76** (Série entière à valeurs réelles)
Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que pour tout $z \in D(0,R)$ on a $f(z) \in \mathbf{R}$. Montrer que f est constante.

F Séries entières et intégrales

□ **Exercice 77** Soit la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer son domaine de convergence.
2) La somme est-elle intégrable sur $[0,1[$?

□ **Exercice 78** Pour p entier naturel non nul, on définit la fonction $F_p : x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^p}$.

1) Déterminer le rayon de convergence puis le domaine de définition de F_p.
2) Soit $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que Γ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
3) Déterminer un équivalent de F_p quand x tend vers 1^- (à exprimer en fonction de Γ).
   On pourra utiliser la comparaison série-intégrale, avec
   $f : u \mapsto x^{u^p}$

□ **Exercice 79** Soit a un réel strictement positif ; on considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^n}{n+a}$.

1) Déterminer son rayon de convergence.
2) Continuité et expression intégrale de la somme.

□ **Exercice 80** Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$.
2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
3) Calculer la somme de la série sur $]-R,R[$
4) Étudier $S(x)$ en R et en $-R$.

□ **Exercice 81** Utilisation des intégrales de Wallis : développement en séries entières d'une intégrale dépendant d'un paramètre, formule de Stirling

1) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, pour $n \in \mathbf{N}$.
   a) Montrer que : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
   b) Sans calculer I_n, montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
   c) Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, et strictement positive.
   d) Calculer I_n (former une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}), donner plusieurs écritures de I_n.
   e) Justifier que : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, et en déduire la limite de la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$.
   f) Montrer que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante, donner la valeur de cette constante.

g) Déduire des deux questions précédentes que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2) Soit la fonction $F\ x \longmapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x\cos^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$.

a) Montrer que F est définie pour $x < 1$; que se passe-til pour $x = 1$?

b) Etudier sans calcul le sens de variations de F.

Montrer que F est continue sur $]-\infty, 1[$.

c) Donner le développement en série entière de $X \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-X}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n$ et son intervalle ouvert de convergence. Comparer α_n et I_{2n}.

d) Montrer que $x \longmapsto F(x)$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$, et déterminer son développement.

3) Formule de Stirling

a) Pour $n \geqslant 1$ on pose : $a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$, et $b_n = \ln(a_n)$. Montrer que la suite b_n est convergente.
On pourra étudier la nature de la série de terme général : $t_n = b_{n-1} - b_n$.

b) En déduire que la suite (a_n) converge vers un réel $\ell > 0$.

c) Calculer ℓ en utilisant a).

En déduire la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$.

□ **Exercice 82** Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2(t))\,\mathrm{d}t$$

Étudier la convergence de la série obtenue aux bornes de l'intervalle de convergence.
Calculer f.
On pourra montrer que f est dérivable, calculer f' et en déduire f.

□ **Exercice 83** Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction
$f : x \mapsto f(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$, et calculer $f(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.

□ **Exercice 84** Soient x, t réels, $|x| < 1$.

1) Calculer $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x - e^{it}}\right)$.

2) Ecrire $\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$ sous la forme d'une série.

3) Montrer que : $\int_0^{\pi} \left(\ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)\right)^2\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$.

□ **Exercice 85** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $a_0 = 1$ et $\forall n > 0,\ a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$.

(on peut montrer que a_n est le nombre de mots de parenthèses de longueur $2n$)
On note R_a le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et f sa fonction somme.

1) Pour tout x tel que $|x| < R_a$, former une équation du second degré vérifiée par $f(x)$.
On pourra utiliser un produit de Cauchy.

2) Montrer que $R_a \leqslant \frac{1}{4}$. En déduire une expression de f sur $]-R_a, R_a[$.

3) En supposant que $R_a > 0$, exprimer a_n en fonction de n.

4) Faire une synthèse.

CHAPITRE 12

Espaces préhilbertiens I

1 Applications du cours

A Produit scalaire : généralités

□ **Exercice 1** Soit E un espace euclidien et $(x,y) \in E^2$; calculer $\| \|y\|^2 x - (x|y)y \|^2$ et retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et l'étude du cas d'égalité.

□ **Exercice 2** Soit $E = \mathbf{R}[X]$, $\forall (P,Q) \in E^2$, on pose
$(P|Q) = \frac{1}{4}(P(1)Q(1) + 2P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1))$.

1) $(\ |\ )$ est-il un produit scalaire sur E ?
2) $(\ |\ )$ est-il un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$? Base orthonormale ?

□ **Exercice 3** Soit $E = \mathbf{R}[X]$ est muni du produit scalaire :

$$(P\,|\,Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$$

Soit P_0 un polynôme non nul, et $F_0 = P_0.\mathbf{R}[X]$ l'ensemble des multiples de P_0
Montrer que F_0 est un sous-espace-vectoriel de $\mathbf{R}[X]$. Déterminer $(F_0)^\perp$.

□ **Exercice 4** Trouver les fonctions f continues sur $[a,b]$ telles que : toute fonction g continue sur $[a,b]$ vérifiant $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t = 0$ vérifie également $\int_a^b f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

□ **Exercice 5**

1) Soient $a < b$; on suppose que h est continue sur $[a,b]$, et à valeurs réelles positives.
   Montrer que $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h \equiv 0$.
2) Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On définit :

$$\forall (f,g) \in E \times E \quad , \quad (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

   Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E.

□ **Exercice 6** Soit E un espace euclidien, trouver une condition nécessaire et suffisante sur un couple $(x,y) \in E^2$ pour que : $\|x-y\| = |\|x\| - \|y\||$.

B Familles de vecteurs, orthogonales ou autres

□ **Exercice 7** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E espace vectoriel euclidien. Montrer que : $\forall\, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n \ , \ \exists!\, x \in E, \ , \ \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \ , \ (x|e_i) = a_i$.

□ **Exercice 8** Soit E un espace vectoriel euclidien, et $(u, v) \in E^2$ tel que $\|u\| = \|v\| = 1$.
Montrer que $(u+v, u-v)$ est une famille orthogonale de E ; en déduire un procédé de construction d'une base orthonormale d'un plan vectoriel de E de base (a, b) (a et b non nécessairement unitaires).

□ **Exercice 9** Soit E un epace euclidien, $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E et $p \in \{2, \cdots, n-1\}$.
On note $F = \{x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ / \ \sum_{i=1}^{p} x_i = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, en trouver une base, donner sa dimension, déterminer $F^\perp$.

C Polynômes orthogonaux

□ **Exercice 10** Polynômes de Tchebychev :

1) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}[X]$ tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

2) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ en posant :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2 \quad (P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

On commencera par vérifier que l'intégrale converge.
Calculer $(T_m|T_n)$, pour $(m, n) \in \mathbf{N}^2$.

D Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

□ **Exercice 11** Soit E un espace euclidien de dimension 3, dont (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormal ; soient trois réels α, β, γ tels que : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Soit P le plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.
Donner la matrice (dans la base (e_1, e_2, e_3)) de la projection orthogonale sur P et la matrice de la réflexion par rapport à P.

□ **Exercice 12** Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne usuelle, et
$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, déterminer sa dimension et en donner une base.
2) Déterminer la matrice, relativement à $\mathscr{B}$, de la projection orthogonale sur F.

□ **Exercice 13** Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne usuelle, et
$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, déterminer sa dimension et en donner une base.
2) Déterminer la matrice, relativement à $\mathscr{B}$, de la symétrie orthogonale sur F.

□ **Exercice 14** L'espace $\mathbf{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Déterminer l'image du plan d'équation $x + y + z = 0$ par le retournement d'axe D défini par $x + 2y = 0$ et $x + y - z = 0$.

□ **Exercice 15** Soit U une matrice colonne à n éléments réels telle que $U^\top U = 1$.
Quelle est la nature de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de matrice $A = I_n - 2UU^\top$?

□ **Exercice 16** Soit E un espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base orthonormale ; caractériser les endomorphismes dont les matrices dans cette base sont :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 17** Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$, muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$
Trouver une base orthonormée de H où $H = \{P \in E / P(1) = 0\}$. Déterminer le projeté orthogonal sur H de X^3.

□ **Exercice 18** Soit (P) le plan d'équation : $x + y + z = 0$.

1) Déterminer la matrice A, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur P.
2) La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ? éléments propres ?

□ **Exercice 19** Soit $(E, (.|.))$ un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur orthogonal. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{rg}(p)$.

E Distance à un sous-espace vectoriel

□ **Exercice 20** On munit $\mathbf{R}_2[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Chercher une base orthonormale et déterminer : $\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 21** Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^1 x^2(\ln x - ax - b)^2\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 22** Calculer : $\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^\pi (x - a\cos(x) - b\sin(x))^2\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 23** Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$; soit l'application $(\ |\ )$ définie sur E^2 par :
$\forall P, Q \in E, P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$.

1) Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E.
2) Montrer que $H = \{P \in E / P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E ; en donner sa dimension et une base.
3) Déterminer $p(1)$, où p est la projection orthogonale sur H, puis $d(1, H)$.
4) Déterminer $p(X)$, où p est la projection orthogonale sur H, puis $d(X, H)$.

□ **Exercice 24** On munit $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire usuel. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ ayant des 1 sur toute sa première ligne et des zéros partout ailleurs. Soit F l'espace vect$(I, U, \ldots, U^{n-1})$ où U est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la projection orthogonale de A sur F. Calculer $\mathrm{d}(A, F)$.

□ **Exercice 25** Soit $E = \mathbf{R}[X]$, montrer que l'application

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{R}[X] \quad , \quad (P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur E.

Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2\,\mathrm{d}t$.

F Adjoint

□ **Exercice 26**

1) Soit E un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$; montrer que $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.
2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$; comparer $\mathrm{Ker}(A^\top A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.

□ **Exercice 27** Soit E un espace euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ et f^* son adjoint. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f^*) = (\mathrm{Im} f)^\perp \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Ker} f)^\perp$$

□ **Exercice 28** $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est muni du produit scalaire usuel et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer l'adjoint de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \phi_A : & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ & M & \longmapsto & AM \end{array}$$

□ **Exercice 29** Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.
Montrer que $\|u\|_{\mathrm{op}} = \|u^*\|_{\mathrm{op}} = \sqrt{\|u \circ u^*\|_{\mathrm{op}}} = \sqrt{\|u^* \circ u\|_{\mathrm{op}}}$
(On procédera par inégalités)

G Isométries vectorielles

□ **Exercice 30** On considère $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée usuelle. Pour tous réels strictement positifs a, b, c on note $M(a,b,c)$ la matrice

$$M(a,b,c) = -2/3 \begin{pmatrix} -1/2 & b/a & c/a \\ a/b & -1/2 & c/b \\ a/c & b/c & -1/2 \end{pmatrix}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in O_3(\mathbf{R})$, pour que $M \in O_3^+(\mathbf{R})$.
Décrire les transformations associées à ces matrices $M(a,b,c)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

□ **Exercice 31** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b pour que A soit une matrice orthogonale ; déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

□ **Exercice 32** Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ qui sont symétriques et orthogonales.

□ **Exercice 33** Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall\, (x,y) \in E \times E \ , \ (x|y) = 0 \implies (f(x)|f(y)) = 0$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$, $\forall\, (x,y) \in E \times E$, $(f(x)|f(y)) = \alpha(x|y)$.

□ **Exercice 34** L'espace $\mathbf{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle. Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe orienté par $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$.

□ **Exercice 35** Soient E un espace vectoriel euclidien, u un vecteur non nul de E et λ un réel non nul.
On considère l'application $f : E \to E$ définie par

$$f : x \mapsto x + \lambda(u|x)u$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ et u pour que f soit une isométrie vectorielle de E. Déterminer alors f.

□ **Exercice 36** Soient E un espace vectoriel euclidien et u une isométrie vectorielle de E.
On suppose qu'il existe un vecteur x de E tel que $u(x) \neq x$, on pose $y = u(x)$.

1) Démontrer qu'il existe une unique réflexion s de E telle que $s(x) = y$.
2) Démontrer que : $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$.
3) Démontrer que : $\dim\Big(\mathrm{Ker}(s \circ u - \mathrm{id}_E)\Big) > \dim\Big(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)\Big)$.
4) Démontrer, par récurrence, que tout automorphisme orthogonal de E est une composée de réflexions.

□ **Exercice 37** Soit la matrice : $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est une matrice orthogonale.
2) Déterminer les caractéristiques de l'isométrie représentant A dans une base orthonormale directe.

□ **Exercice 38** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et $\mathscr{B}$ une base orthonormale directe de E. Déterminer la nature de l'endomorphisme f tel que
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -4 & -4 & 7 \\ 1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 39** Soit $R = a\begin{pmatrix} 1 & 1-b & 1+b \\ 1+b & 1 & 1-b \\ 1-b & 1+b & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ pour que R soit une matrice de rotation.

2 Exercices plus élaborés

A Produit scalaire : généralités

□ **Exercice 40** Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $a, b \in E$ fixés. Déterminer les bornes inférieures et supérieures de

$$\left\{ \frac{(x|a)(x|b)}{\|x\|^2} \; ; \; x \in E \setminus \{0\} \right\}$$

□ **Exercice 41** Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$, dont la norme euclidienne associée est notée $\|\ \|$.

Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E \ , \ \ \|f(x)\| \leqslant \|x\|$$

On se propose de montrer par deux méthodes que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E.

1) a) Soit (x, y) un couple de vecteurs fixé appartenant à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \times E$.

En utilisant la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \ , \ \ \varphi(\lambda) = \|f(\lambda x + y)\|^2 - \|\lambda x + y\|^2$$

montrer que $(x|f(y) - y) = 0$.

Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$ sont orthogonaux.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E.

2) On se propose de retrouver ce résultat autrement :

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$; il existe donc un vecteur y de E tel que : $x = f(y) - y$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, f^n(y) = nx + y$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \|x\| \leqslant \frac{2}{n}\|y\|$, puis que $x = 0_E$.
Conclure.

B Familles de vecteurs, orthogonales ou autres

□ **Exercice 42** Soit E un espace euclidien, $p \in \mathbf{N}^*$, $(e_1, \ldots, e_p) \in E^p$ tel que :

$$\begin{cases} \forall\, i \in \{1, \ldots, p\} \ , \ \ \|e_i\| = 1 \\ \forall\, x \in E \ , \ \ \sum\limits_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 = \|x\|^2 \end{cases}$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille orthonormale, puis une base de E.

□ **Exercice 43** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale d'une espace vectoriel euclidien E, et soient $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$.

$\forall\, i \in [\![1, n\mathrm{id}$, on pose $v_i = u_i + e_i$. Montrer que si : $\sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < 1$, alors $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre.

□ **Exercice 44** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n ; montrer qu'il existe n vecteurs $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ tels que :

$$\begin{cases} \text{i)} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \ , \ \ \|u_i\| = 1 \\ \text{ii)} \quad \forall\, (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \ , \ i \neq j \implies \|u_i - u_j\| = 1 \end{cases}$$

Indications : déterminer une propriété équivalente à la condition ii) (pour une famille de vecteurs unitaires), et ne portant que sur les $(u_i|u_j)$; montrer que si une telle famille existe, c'est une base de E ; ensuite, on pourra procéder par récurrence sur $n = \dim E$.

□ **Exercice 45** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n ; montrer que le cardinal maximal d'une famille $(u_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}}$ de vecteurs de E vérifiant :
$\forall\, i, j \in \{1, \ldots, p\} \ , \ i \neq j \implies (u_i|u_j) < 0$ est $n + 1$.

□ **Exercice 46** Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une suite de vecteurs unitaires distincts dans un espace vectoriel euclidien E ; on suppose qu'il existe α tel que :
$\forall\, (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \ , \ i \neq j \implies (u_i|u_j) = \alpha$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ liée.

1) Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$ et que $\dim(\text{vect}(u_1, \ldots, u_n)) = n - 1$.

2) Montrer que $\alpha = -\frac{1}{n-1}$. Construire un tel système par récurrence sur n.

□ **Exercice 47** Inégalité d'Hadamard :
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \geqslant 1$.

1) Montrer que :

$$\forall\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n\ ,\ |[x_1, x_2, \ldots, x_n]| \leqslant \|x_1\|\,\|x_2\| \ldots \|x_n\|$$

2) Montrer que si tous les x_i sont non nuls, on a égalité si et seulement si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base orthogonale de E.

□ **Exercice 48** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $(C_1, \cdots, C_n)$ ses vecteurs colonnes ; $\|\ \|$ désigne la norme euclienne usuelle sur $\mathbf{R}^n$.

1) Montrer que : $|\det(A)| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|$.

2) On suppose maintenant que : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $|a_{ij}| \leqslant 1$.
Montrer que : $|\det(A)| \leqslant n^{\frac{n}{2}}$ et trouver une matrice $(2, 2)$ vérifiant l'égalité.

□ **Exercice 49** Déterminant de Gram :
soit E un espace vectoriel euclidien, $n \in \mathbf{N}^*$, $n \leqslant \dim E$, $(u_1, ..., u_n) \in E^n$ et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale d'un sous-espace de E contenant $u_1, ..., u_n$; on note A la matrice du système $(u_1, ..., u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ et $G(u_1, ..., u_n)$ la matrice $((u_i|u_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, appelée *matrice de Gram* du système $(u_1, ..., u_n)$.

1) Montrer que $G(u_1, ..., u_n) = A^\top A$. En déduire, lorsque $n = \dim E$, la propriété du produit mixte :

$$[u_1, ..., u_n]^2 = \det G(u_1, ..., u_n)$$

2) Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}\,(A^\top A)$; en déduire $\text{rg}(u_1, ..., u_n) = \text{rg}(G(u_1, ..., u_n))$.

3) Soit F un sous-espace strict de E muni d'une base $(b_1, ..., b_p)$ et v un vecteur de E. Montrer que la distance d de v à F est donnée par :

$$d^2 = \frac{\det G(b_1, ..., b_p, v)}{\det G(b_1, ...b_p)}.$$

□ **Exercice 50** Soit $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de vecteurs de l'espace euclidien $(E, (.))$ de dimension n.
On suppose que pour tout i, $\|u_i\| = 1$ et pour tous i, j distincts : $\|u_i - u_j\| = 1$. Montrer que la famille $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ est libre.
Montrer ensuite qu'une telle famille existe dans E.

C Polynômes orthogonaux

□ **Exercice 51** Polynômes de Laguerre :
soit $E = \left\{f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R} \,/\, f \text{ continue et } t \mapsto [f(t)]^2 e^{-t} \text{ intégrable sur } \mathbf{R}^+\right\}$.

1) Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel contenant $\mathbf{R}[X]$ et que
$(f|g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

2) On pose : $\forall n \in \mathbf{N} \quad L_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot e^x \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n e^{-x}\right)$.
Montrer que L_n est une fonction polynôme ; expliciter L_n.

3) Pour $m \leqslant n$, calculer $(L_n|X^m)$ et $(L_n|L_m)$.

D Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

□ **Exercice 52** Soit E un espace vectoriel euclidien et p une projection vectorielle de E ; montrer que :
(p est une projection orthogonale) $\iff$ $(\forall\, x \in E\ ,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|)$.

□ **Exercice 53** Soit E un espace euclidien. On considère deux projecteurs orthogonaux p et q de E tels que $q - p$ soit un projecteur de E.

1) Démontrer que pour tout x dans E : $(p(x)|x) = \|p(x)\|^2$, puis que pour tout x dans $\mathrm{Im}(p)$, on a : $(q(x)|x) = \|x\|^2$. On pourra utiliser qu'un projecteur orthogonal a pour adjoint lui-meême.
2) Démontrer que $q \circ p = p$. Que vaut $p \circ q$? Cela reste-t-il vrai pour des projecteurs quelconques dont la différence est un projecteur ?

E Distance à un sous-espace vectoriel

□ **Exercice 54** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Soit $S_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices (n, n) symétriques réelles.

Déterminer $\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - m_{ij})^2 \ /\ M = (m_{ij}) \in S_n(\mathbf{R})\right\}$.

□ **Exercice 55** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Existe-t-il des solutions à $AX = b$?
2) Interpréter. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathbf{R}^3$ vérifiant $\|AX_0 - b\|_2 = \min\{\|AX - b\|_2 / X \in \mathbf{R}^3\}$, et déterminer la valeur de ce minimum.
3) X_0 est-il unique ? Déterminer un tel vecteur X_0, puis tous.

F Adjoint

□ **Exercice 56** Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a et b deux vecteurs non nuls de E tels que $(a|b) = 0$.

On définit un endomorphisme de E par :

$$\forall\, x \in E\ ,\ \ u(x) = (a|x)\, b - (b|x)\, a$$

1) Expliciter u^* et calculer $\|u\|_{\mathrm{op}}$.
2) On suppose que : $\|b\| \leqslant \|a\|$. Déterminer un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant les trois conditions :
$$(i)\ \ f^* = -f \quad (ii)\ |f| \leqslant 1 \quad (iii)\ \ f(a) = b$$

□ **Exercice 57** Soit E un espace euclidien. Déterminer l'adjoint d'une symétrie de E. Quelles sont les symétries qui sont des endomorphismes autoadjoint ?

□ **Exercice 58** Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E \quad (u(x)|x) = 0$.

1) Montrer que $u^* = -u$; en déduire que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.
2) Montrer que u est de rang pair.
On pourra s'intéresser à l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.

□ **Exercice 59**

Soit E un espace euclidien de dimension n, a, b et x sont trois vecteurs de E. trouver une CNS sur a, b et x pour qu'il existe un endomorphisme f de E vérifiant $f(x) = a$ et $f^*(x) = b$.

□ **Exercice 60** Soit E un espace euclidien de dimension n. On pose

$$A = \{f \in \mathscr{L}(E) \,/\, f \circ f^* \circ f = f\}$$

1) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Comparer $\mathrm{Ker}(f^* \circ f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$, puis $\mathrm{Im}(f^* \circ f)$ et $\mathrm{Im}(f^*)$.
2) Montrer que $f \in A$ si et seulement si $f^* \circ f$ est un projecteur orthogonal.
3) Montrer que $f \in A$ si et seulement si $\forall\, x \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp$, on a $\|f(x)\| = \|x\|$.
4) Montrer que si f est dans A, alors on a $(\mathrm{Ker}(f))^\perp = \{x \in E / \|f(x)\| = \|x\|\}$.

□ **Exercice 61** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $u : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $u : X \mapsto AX - XA$.

1) Déterminer l'adjoint de u pour le produit scalaire de Schur $((M, N) \mapsto \mathrm{tr}(M^\top N))$.
2) Soit $C(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) / AM = MA\}$ le commutant de A. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = (C(A^\top))^\perp$.

G Isométries vectorielles

□ **Exercice 62** Soient n un entier naturel non nul et $M = (a_{ij}) \in O(n)$.
Démontrer que : $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ |a_{ij}| \leqslant 1$.
Démontrer que : $\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^2 \leqslant n^4$ (puis n^3 et n^2).

Pour la majoration par n^2, on pourra utiliser le vecteur $w = \sum_{i=1}^{n} e_i$ de $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle où $(e_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ est la base canonique.

□ **Exercice 63**

Soit E un espace euclidien, $u \in O(E)$ et $v = u - id$.

1) Montrer que : $\mathrm{Ker}(v) = \Big(\mathrm{Im}(v)\Big)^\perp$.
2) Soit p la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(v)$. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k = p$.

□ **Exercice 64** On donne les deux droites : $(D_1)\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et $(D_2)\ \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Image de (D_1) par la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'axe (D_2).

□ **Exercice 65** Soit $A = \begin{pmatrix} 2a^2-1 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2-1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2-1 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

1) Vérifier que l'endomorphisme u canoniquement associé à A est une isométrie vectorielle.
2) Reconnaitre u, éléments caractéristiques de u.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 66** Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$, $\forall\ (P, Q) \in E^2$, on pose $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_3[X]$, déterminer la base obtenue par le procédé de Schmidt appliqué à $(1, X, X^2, X^3)$.
2) Montrer que : si $(P|P) = 1$, alors $\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$. Egalité ?

CHAPITRE 13

Probabilités II

1 Applications du cours

□ **Exercice 1** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X et soit $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1) Exprimer $\mathbf{P}(M_n \leqslant k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X \leqslant k)$.
2) Supposons que les (X_n) suivent une loi uniforme sur $N_K = \{1, 2, \dots, K\}$ où $K > 1$. Exprimer $\mathbf{E}(M_n)$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(M_n)$.
3) Supposons que les (X_n) suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Exprimer $\mathbf{E}(M_n)$ sous la forme d'une somme.
4) Soit $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Donner la loi de m_n.

□ **Exercice 2** Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Justifier l'existence et calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{2X+1}$

□ **Exercice 3** Le nombre de fleurs portées par un pommier suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque fleur donne un fruit avec la probabilité p.

1) Quelle est la loi conditionnelle du nombre de pommes, sachant que le nombre de fleurs est k ?
2) Déterminer l'espérance du nombre de fruits portés par le pommier.
3) Quelle est la loi du nombre de pommes ?

Cet exercice peut être vu comme un cas particulier des identités de Wald.

□ **Exercice 4** On considère n ampoules éteintes numérotées de 1 à n. L'ampoule i a une probabilité p_i de s'allumer à un instant donné. On note Y la variable aléatoire comptant le nombre d'ampoules s'allumant.

1) Exprimer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$.
2) On fixe à présent m et on considère des p_i tels que $\mathbf{E}(Y) = m$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_i pour que $\mathbf{V}(Y)$ soit maximal. Donner la loi de Y dans ce cas.

□ **Exercice 5** Un péage comporte 3 voies et n voitures se présentent en choisissant aléatoirement et indépendamment une voie. On note X_i le nombre de voitures qui passent par la voie i pour $i \in \{1,2,3\}$.

1) Déterminer la loi des X_i.
2) Calculer $\mathbf{V}(X_1)$, $\mathbf{V}(X_2)$ et $\mathbf{V}(X_1+X_2)$. En déduire $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$.
3) Les variables X_1, X_2, X_3 sont-elles indépendantes deux à deux ? mutuellement indépendantes ?

□ **Exercice 6** Une urne contient $a \geqslant 1$ boules blanches et $b \geqslant 1$ boules rouges. À chaque tirage, on remet la boule tirée et on ajoute $c \geqslant 1$ boules de la même couleur. Soit Y la variable aléatoire donnant le rang de la première boule blanche tirée.

1) Donner sa loi.
2) Admet-elle une espérance ? Un moment d'ordre $p \geqslant 2$?

□ **Exercice 7** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

1) À quelle condition sur α existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(X=n) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.
2) Lorsque cela est réalisé, montrer que X admet une variance et la calculer.

□ **Exercice 8** Soient X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et $Y = X^2+1$.

1) Calculer $\mathbf{E}(Y)$.
2) Calculer $\mathbf{P}(2X < Y)$.
3) Comparer $\mathbf{P}(X \in 2\mathbf{N})$ et $\mathbf{P}(X \in 2\mathbf{N}+1)$.

□ **Exercice 9** Soit X et Y deux v.a.r indépendantes et de même loi, définie par :

$$\begin{cases} X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X=n) = \mathbf{P}(Y=n) = pq^n, \text{ où } p>0,\ q>0,\ p+q=1 \end{cases}$$

On pose $Z = \max(X,Y)$. Déterminer la loi de Z et si elle existe son espérance.

□ **Exercice 10** Soit (X,Y) un couple de variable aléatoire discrète réelle à valeurs dans $\mathbf{N}^2$ tel que :

$$\forall (j,k) \in \mathbf{N}^2, \quad \mathbf{P}((X=j)\cap(Y=k)) = \frac{j+k}{e.2^{j+k}j!k!}$$

1) Vérifier que l'on a bien défini ainsi la loi de probabilité de (X,Y).
2) Calculer $\mathbf{E}(2^{X+Y})$

□ **Exercice 11** Soit (X,Y) un couple de variable aléatoire discrète réelle à valeurs dans $\mathbf{N}^2$, tel que :

$$\forall (j,k) \in \mathbf{N}^2, \quad \mathbf{P}((X=j)\cap(Y=k)) = \frac{a}{(j+k+1)!}$$

1) Déterminer a.
2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer la loi de $Z = X+Y$.
4) La variable Z est-elle d'espérance finie ? Si oui calculer $\mathbf{E}(Z)$.
5) Retrouver ce résultat directement sans déterminer la loi de $X+Y$.
6) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.

□ **Exercice 12** Un ascenseur monte et dessert n étages d'un immeuble. Le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur au rez de chaussée est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
On émet les hypothèses suivantes :

- Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez de chaussée.
- Chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard et indépendamment des autres passagers. (Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur).

Enfin, on appelle S la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur.

1) Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et pour tout entier naturel k :
$$\mathbf{P}_{(X=k+1)}(S = j) = \frac{j}{n}\mathbf{P}_{(X=k)}(S = j) + \frac{n-j+1}{n}\mathbf{P}_{(X=k)}(S = j-1)$$
2) On note pour tout entier k, $\mathbf{E}_{(X=k)}(S)$ l'espérance de S pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{(X=k)}$. Montrer que $\mathbf{E}_{(X=k+1)}(S) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathbf{E}_{(X=k)}(S)$.
3) Après avoir justifié que $\mathbf{E}_{(X=0)}(S) = 0$, déterminer $\mathbf{E}_{(X=k)}(S)$ pour tout entier naturel k.
4) Montrer que si S désigne une variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur alors :
$$\mathbf{E}(S) = n\left(1 - e^{\frac{-\lambda}{n}}\right)$$

□ **Exercice 13** On dispose d'une pièce de monnaie donnant "pile" avec la probabilité p et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$ (avec $p \in]0, 1[$). On lance cette pièce, les lancers étant indépendants les uns des autres, et on note N le nombre aléatoire de lancers nécessaires à la première apparition de "pile" (on pose $N = -1$ si "pile" n'apparaît jamais).

Quand "pile" apparaît au bout de n lancers, on effectue une série de n lancers avec cette même pièce et on note X le nombre de "pile" obtenus au cours de cette série.

1) Quelle est la loi de N ?
2) Déterminer la loi du couple (N, X).
3) Calculer $\mathbf{P}(X = 0)$ et $\mathbf{P}(X = 1)$.
4) Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ sous forme d'une série.
5) Calculer la somme de cette série.
6) Déterminer l'espérance de X.
   On pourra utiliser le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$
   Pourquoi ce résultat est-il raisonnable ?

□ **Exercice 14** Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variable aléatoire discrète réelle de Bernoulli de paramètre p indépendantes mutuellement.
Pour $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$

1) Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2) Les variable aléatoire discrète réelle Y_i sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer la matrice des covariances de $(Y_1, \cdots, Y_n)$ et $\mathbf{V}(Y_1 + \cdots + Y_n)$

□ **Exercice 15** Un problème de ruine du joueur :

Soient s, N deux entiers naturels non nuls. Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$. Un individu dispose de s euros (avec $s \in \mathbf{N}^*$) et souhaite acheter un bien qui en coûte N (avec $N \in \mathbf{N}^*$ et $N \geqslant s$). Pour tenter de gagner de l'argent, il propose le jeu suivant à une personne très fortunée : il sort de sa poche une pièce de monnaie (non nécessairement équilibrée) et joue selon la règle suivante :

- si la pièce tombe sur face (ce qui se produit avec la probabilité p), il gagne 1 euro ;
- si la pièce tombe sur pile, il perd 1 euro.

Le jeu s'arrête soit lorsque l'individu est en possession de N euros, soit lorsqu'il est ruiné (si au départ le joueur possède N euros, alors il ne prend même pas part au jeu) ...

Pour tout $k \in \{0, \cdots, N\}$, on note p_k la probabilité de pouvoir acheter le bien avec un avoir initial de k euros. Le nombre N étant fixé, on admet que la variable aléatoire égale à la durée du jeu, lorsque l'individu possède au départ k euros, admet une espérance notée D_k.

1) a) Calculer $p_0,\ p_N$ puis $D_0,\ D_N$.

   b) Montrer que pour tout $k \in \{1, \cdots, N-1\}$, $p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}$.

   c) Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, N\}$,

$$D_k = p(1 + D_{k+1}) + q(1 + D_{k-1})$$

2) Lorsque $p = q = 1/2$, calculer p_s, c'est-à-dire calculer la probabilité de pouvoir acheter le bien à l'issue du jeu avec un avoir initial de s euros.

3) On suppose dans cette question que $p = q = 1/2$. On cherche à calculer D_s, c'est-à-dire à calculer le temps moyen au bout duquel l'individu pourra acheter le bien ou sera ruiné, avec un avoir initial de s euros.

   a) Montrer que la suite définie pour tout $k \in \mathbf{N}$ par $u_k = -k^2$ satisfait à la relation de récurrence :

$$\frac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \frac{1}{2}u_{k-1} = -1$$

   b) Montrer que la suite finie $(v_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ définie par $v_k = D_k - u_k$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

   c) En déduire la valeur de D_s.

4) Calculer p_s, lorsque $p \neq q$

□ **Exercice 16**

Soit $\left(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}\right)$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice.

Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) a) Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbf{N}$ telle que les espérances existent, on a :

$$\mathbf{E}\left[N\, g(N)\right] = \lambda \mathbf{E}\left[g(N+1)\right]$$

   b) Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{N+1}\right)$.

2) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour toute fonction g telle que les espérances existent,

$$\mathbf{E}\big[T g(T)\big] = \lambda \mathbf{E}\big[g(T+1)\big]$$

   La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson ?

□ **Exercice 17** Soient $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements indépendants.
On note : $p_n = \mathbf{P}(A_n)$, $\bar{p}_n = \frac{p_1+\ldots+p_n}{n}$ et $N_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$ ($\mathbf{1}_{A_k}$ désignant la fonction caractéristique de A_k).
À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \bar{p}_n\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(c'est le théorème de Poisson)

□ **Exercice 18** Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{\pm 1\}$ telle que $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$ où $p \in [0,1]$.
On note pour tout entier n, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1) Soit $n \geqslant 1$, calculer $\mathbf{P}(S_{2n} = 0)$.
2) Déterminer deux réels a et b tels que $Z_i = aX_i + b$ suive une loi de Bernoulli pour tout $i \geqslant 1$. On note $T_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Exprimer S_n à l'aide de T_n puis calculer les moments d'ordre 1 et 2 des variables aléatoires T_n et S_n.

□ **Exercice 19** Moyenne et indépendance
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi géométrique sur $\mathbf{N}^*$ de paramètre p, $0 < p < 1$; on note $q = 1 - p$.
On définit les variables aléatoires T, Z et G par :
$T = \min(X, Y)$, $Z = |X - Y|$, $G = \frac{Z}{T}$.

1) Il s'agit d'étudier la loi d'un **minimum** de variables aléatoires.
   a) Calculer, pour tout $x \in \mathbf{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(X \geqslant x)$.
   b) Calculer pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(T \geqslant t)$ et identifier la loi de T.
2) On fait des calculs de moyennes et on on fait l'étude de la loi du couple (T, Z).
   a) Calculer les espérances $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.
   b) Calculer pour $(t, z) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$ la probabilité $\mathbf{P}(T \geqslant t, Z = z)$; étudier séparément le cas $z = 0$.
   c) En déduire la loi de Z.
3) Démontrer alors que les variables aléatoires T et Z sont indépendantes.
   On remarquera que $\mathbf{P}(T \geqslant t, Z \geqslant z)$ s'écrit sous la forme $f(t)g(z)$ où f et g sont des fonctions définies respectivement sur $\mathbf{N}^*$ et $\mathbf{N}$ et qu'il en de même pour $\mathbf{P}(T = t, Z = z)$.
4) Que vaut $\mathbf{E}(G)$?

□ **Exercice 20** Soit $(a, b) \in (]0,1[)^2$ tel que $a + b < 1$.
Un interrupteur admet deux positions que l'on note 0 et 1.
Si, à l'instant n, il est en position 0, il sera encore en position 0 à l'instant $n + 1$ avec la probabilité $1 - a$ et passera en position 1 avec la probabilité a.
De même, s'il est en position 1, il y restera l'instant suivant avec la probabilité $1 - b$ et basculera en position 0 avec la probabilité b.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit X_n la position de l'interrupteur à l'instant n.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $\begin{pmatrix}\mathbf{P}(X_{n+1} = 0)\\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 1)\end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix}\mathbf{P}(X_n = 0)\\ \mathbf{P}(X_n = 1)\end{pmatrix}$
   avec $A = \begin{pmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{pmatrix}$.

2) Si l'on suppose que X_0 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$, déterminer la loi de la variable X_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3) Dans le cas général, montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre p_n.
4) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = 1)$.
5) Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la covariance entre les variables X_n et X_{n+1}. Quelle est la limite de la suite $\big(\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1})\big)_{n\in\mathbf{N}}$?

□ Exercice 21

Une urne contient N jetons numérotées de 1 à N, avec $N \geqslant 3$.
On effectue une succession de tirages, en choisissant à chaque fois au hasard une boule, que l'on replace dans l'urne avant le tirage suivant.
Pour $n \geqslant 2$ et $n \leq N$, on note X_n le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir n numéros distincts. Pour $n \geqslant 3$, on pose $Y_n = X_n - X_{n-1}$.

1) Quelle est la loi de $X_2 - 1$? Déterminer espérance et variance de X_2.
2) Donner une interprétation de Y_n, déterminer sa loi, son espérance et sa variance.
3) Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
4) On suppose N pair et on pose $N = 2m$. Étudier la convergence des suites $\left(\frac{\mathbf{E}(X_m)}{m}\right)_{m\geqslant 2}$ et $\left(\frac{\mathbf{V}(X_m)}{m}\right)_{m\geqslant 2}$.

□ Exercice 22 Une marque de lessive édite une collection de 4 pin's différents. Une personne achète des barils de cette lessive, afin que son fils puisse collectionner les pin's (un pin's par baril).
On suppose les achats indépendants.

1) Montrer qu'au bout de n achats de barils, la probabilité qu'il manque toujours au moins un pin's à son fils est : $p_n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de barils que la ménagère a achetés lorsque son fils a pour la première fois tous les pin's.
2) Exprimer $\mathbf{P}(X > n)$ à l'aide de la probabilité p_n.
3) En utilisant 1) et 2), déduire que X admet une espérance et la calculer.

□ Exercice 23 On ordonne au hasard n jetons numérotés de 1 à n et on dit qu'il y a coïncidence si le jeton numero k se trouve à la k-ième place. On note S le nombre total de coïncidences.
Afin d'étudier S, on introduit pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, la variable X_i égale à 1 s'il y a coïncidence au $i$ème rang et 0 sinon.

1) Reconnaître la loi de X_i.
2) Déterminer pour i et j distincts, la loi conjointe de (X_i, X_j).
3) En déduire l'espérance et la variance de S.

□ Exercice 24 Un sac contient n billes numérotées de 1 à n. On tire une bille au hasard, on note son numéro et on la remet dans le sac.
On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur ce numéro. Lorsque ce numéro est k, on tire sans remise k billes que l'on distribue au hasard dans p boîtes $B_1, \ldots, B_p$. On désigne par Y_i la variable aléatoire égale au nombre de billes reçues par la boîte B_i ($i \in \{1, \ldots, p\}$).

1) Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer la loi conditionnelle de Y_i sachant $(X = k)$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$.
2) Déterminer l'espérance de Y_i.
3) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{Y_i}{X}$.

□ **Exercice 25** Une urne contient initialement n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n, avec $n \geqslant 2$. On vide l'urne en extrayant toutes les boules une à une, au hasard et sans remise.

1) Pour i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au $i^{ème}$ tirage porte le numéro i et 0 dans le cas contraire. Quelle est la loi de X_i ?
2) En déduire l'espérance du nombre de fois où il y a coïncidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue, lorsque l'on vide l'urne.
3) Pour k compris entre 1 et n, on dit que le résultat du k^{eme} tirage est un `record` si la boule obtenue à ce tirage porte un numéro strictement supérieur à tous les numéros obtenus jusqu'alors. (par convention, le résultat du premier tirage sera toujours considéré comme un `record`).
   a) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne et pour lesquelles il n'y a qu'un seul `record` ? Pour lesquelles il y a n records ?
   b) Montrer que pour p et q entiers naturels, on a la relation suivante :
$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+q}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$$
4) Soit k fixé entre 2 et n et j fixé entre k et n. Combien existe-t-il de façons de vider l'urne, pour lesquelles la $k^{ème}$ boule obtenue porte le numéro j et le $k^{ème}$ tirage constitue un `record` ?
5) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles le $k^{ème}$ tirage est un `record` ? En déduire la probabilité que le $k^{ème}$ tirage soit un `record`. Pouvait-on avoir ce résultat directement ?
6) Pour k compris entre 1 et n, soit Y_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat du $k^{ème}$ tirage est un `record` et 0 sinon. Déterminer la loi de Y_k. Soit R le nombre aléatoire de records obtenus lorsque l'on vide l'urne. Déterminer l'espérance de R.

□ **Exercice 26**

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire telle que : $\forall t \in [0,1],\ G_X(t) = \dfrac{e^{t-1}}{\sqrt{2-t}}$.
2) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

□ **Exercice 27** Soit $S : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}\, t^n$.

1) Donner le rayon de convergence R de cette série entière.
2) Calculer $S(t)$ sur $]-R, R[$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que, $\forall t \in [-1,1]$, $G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.

3) Que vaut λ ?
4) Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbf{N}$.
5) Calculer l'espérance et la variance de X.

2 Exercices plus élaborés

□ **Exercice 28** (Identités de Wald)

On considère une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On suppose que N est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ possédant un moment d'ordre 2 et que les variables aléatoires (X_i), $i \in \mathbf{N}^*$, suivent la même loi que X, où X est une variable aléatoire réelle discrète et possédant un moment d'ordre 2.

On note Y la fonction définie par $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ c'est-à-dire :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

a) Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.

b) Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(Y)$ en fonction de $\mathbf{E}(X)$ et de $\mathbf{E}(N)$. On justifiera que Y est bien d'espérance finie.

c) Déterminer $\mathbf{E}(Y^2)$ en fonction de $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{E}(N^2)$.

d) En déduire $\mathbf{V}(Y)$ en fonction de $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

e) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n et on dispose d'une pièce de monnaie qui donne le côté pile avec la probabilité p, où $0 < p < 1$. Un joueur tire un jeton dans l'urne et lance ensuite la pièce de monnaie autant de fois que le numéro indiqué par le jeton.

Calculer la moyenne et la variance de la variable aléatoire comptabilisant le nombre de pile obtenu.

□ Exercice 29 (Identités de Wald - II)

On considère des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ mutuellement indépendantes $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

On suppose que les variables aléatoires (X_i), $i \in \mathbf{N}^*$, suivent la même loi que X, où X est une variable aléatoire réelle discrète.

On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ c'est-à-dire :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

a) Montrer que $G_Y = G_N \circ G_X$ sur $[-1, 1]$ où G_Y, G_N et G_X sont les fonctions génératrices des variables Y, N et X.

b) Dans le cas où N et X ont des moment finis d'ordre 2, montrer que Y admet un moment fini d'ordre 2 et exprimer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$ en fonction des espérances et variances de X et N.

□ Exercice 30

Une urne contient n boules numérotées (non bleues) de 1 à n et k boules bleues non numérotées. Les boules sont tirées avec remise jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée. Au cours de ces tirages, on définit le nombre R de répétitions de la manière suivante :

au début, $R = 0$. Ensuite, on ajoute 1 à R dès que l'on obtient une boule numérotée qui avait été déjà tirée précédemment.

a) Déterminer les probabilités des événements suivants :

- $A_1 =$: « la première boule tirée est la boule numéro 1 ».
- $A_2 =$: « la première boule tirée est une boule portant un numéro strictement supérieur à 1 »
- $A_3 =$ « la première boule tirée est une boule bleue »

b) On note A_0 l'événement "la boule numéro 1 n'est jamais tirée lors du jeu". En utilisant la formule des probabilités totales avec les événements précédents, montrer que $\mathbf{P}(A_0) = \frac{k}{k+1}$.

c) On note X le nombre de fois où l'on a tiré la boule 1 au cours du jeu. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question précédente, montrer que $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{k}$.

d) On définit la variable aléatoire Y par :

$$\begin{cases} \text{Si } X \geqslant 1, \text{ alors } Y = X - 1 \\ \text{Si } X = 0, \text{ alors } Y = 0 \end{cases}$$

(Y est donc le nombre de répétitions de la boule numérotée 1.)
Montrer que $\mathbf{E}(Y) = \sum_{m\geq 1} (m-1)\mathbf{P}(X = m)$ puis que $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{k(k+1)}$.

Soit r un entier naturel. On recherche la valeur minimale de k (en fonction de n et r) de manière à ce que le nombre moyen t de répétitions soit inférieur ou égal à r.

e) Montrer que $t = n\mathbf{E}(Y)$.

f) En déduire que la valeur minimale recherchée est $k_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{n}{r} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rceil$.

□ **Exercice 31** On lance N dés. À chaque tour, on relance ceux qui n'ont pas donné 6 lors des tours précédents. Soit S_n la variable aléatoire donnant le nombre total de dés ayant donné 6 au cours des n premiers tours.

a) Montrer que S_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b) Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(S_n = N)\right) = 1$.

c) On pose $T_N = \inf\{n \in \mathbf{N}^*,\ S_n = N\} \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$.

A. Donner la loi de T_N.

B. Montrer que T_N admet une espérance et la calculer.

□ **Exercice 32** Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

□ **Exercice 33** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$.

a) Justifier la bonne définition d'une telle loi et calculer l'espérance de X.

b) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note A_n l'événement $(n \mid X)$. Les événements A_p et A_q sont-ils indépendants si p et q sont deux entiers pairs ?

c) Étudier l'indépendance de A_p et A_q pour p et q entiers quelconques.

□ **Exercice 34** Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ une suite de variables de Rademacher indépendantes telles que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{P}(\varepsilon_n = +1) = \mathbf{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2.$$

a) Calculer l'espérance $\mathbf{E}\big((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2\big)$ en fonction de n.

b) Soit $a \in]0, 1[$ fixé.

A. Montrer l'inégalité $\mathbf{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geqslant a.n) \leqslant \frac{1}{a^2 n}$.

B. Montrer que

$$\mathbf{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geqslant an) = \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \mathbf{1}_{\{|2\ell - n| \geq a.n\}}$$

C. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geqslant an\}} = 0$.

c) Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson, de paramètre $\theta > 0$ telle que $(N, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ sont mutuellement indépendantes. Calculer, en fonction de θ, l'espérance :

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n\right)^2\right)$$

□ **Exercice 35** Soit $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathscr{G}(p)$. On pose $Y_n = \min(X_1,\dots,X_n)$ et $Z_n = \max(X_1,\dots,X_n)$; $\alpha_n = \mathbf{E}(Y_n)$ et $\beta_n = \mathbf{E}(Z_n)$.

a) Déterminer la monotonie des suites (α_n) et (β_n).

b) Calculer α_n.

c) Déterminer la limite de (β_n). Donner un équivalent de β_n.

□ **Exercice 36** Lemmes de Borel-Cantelli :

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$. On note B l'événement $\bigcap\limits_{n\geq 1}\Big(\bigcup\limits_{k\geq n} A_k\Big)$.

On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$

a) On suppose que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbf{P}(A_k)$ converge. Montrer que $\mathbf{P}(B) = 0$.

b) On suppose que les événements (A_n) sont indépendants et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ est divergente.

A. Montrer que l'événement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup\limits_{n\geq 1}\Big(\bigcap\limits_{k\geq n} \overline{A_k}\Big)$, où $\overline{M}$ désigne l'événement contraire de l'événement M.

B. Exprimer $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big)$ en fonction des p_k.

C. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \ln(1-p_k)$ est divergente.

D. En déduire que $\mathbf{P}(B) = 1$.

c) Soit α un réel strictement positif et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^\alpha}$.

A. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = 0$.

B. On suppose que $0 < \alpha \leqslant 1$.
Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n \mid X_n = 1\}$ contient une infinité d'éléments.

C. On suppose que $\alpha > 1$.
Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n \mid X_n = 1\}$ est fini.

□ **Exercice 37**

a) Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$.

b) A. Dire pourquoi pour tout (x,y) de $[-1,1]^2$, la famille

$$\big(\mathbf{P}(X = n \cap Y = m)x^n y^m\big)_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$$

est sommable. On note $G_{(X,Y)}(x,y)$ sa somme.

B. Montrer que $G_{(X,Y)}(x,y) = \mathbf{E}(x^X y^Y)$.

On suppose désormais que pour tout (x,y) de $[-1,1]^2$,

$$G_{(X,Y)}(x,y) = \frac{py}{\ln(1-p)} \times \frac{\ln(1-pxy)}{1-(1-p)y}$$

où p est un réel de $]0,1[$.

c) A. Déterminer $G_X(x)$ pour tout x de $[-1,1]$.

B. En déduire la loi marginale de X.

d) A. Vérifier que $Y-X$ est presque sûrement à valeurs positives.

B. Montrer que les variables aléatoires X et $Y-X$ vérifient, pour tout (x,y) de $[-1,1]^2$:

$$G_{(X,Y-X)}(x,y) = G_X(x)G_{Y-X}(y).$$

C. Déterminer la loi de $Y-X$.

□ Exercice 38

a) Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle de variance égale à a.

b) On suppose dans cette question que $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ est la matrice de variance-covariance d'un couple de variables aléatoires discrètes réelles (X,Y). Montrer que $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$ et $ab - c^2 \geqslant 0$.

c) Réciproquement, on suppose que la matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ vérifie $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$ et $ab - c^2 \geqslant 0$.

On suppose que $ab = 0$. Montrer que M est la matrice de variance-covariance d'un vecteur réel (X,Y).

d) On suppose que $ab \neq 0$. On pose

$$\sigma_1 = \sqrt{a},\ \sigma_2 = \sqrt{b},\ \text{ et } \rho = \frac{c}{\sqrt{ab}}$$

Soit (U,V) un couple de variables aléatoires discrètes, avec U et V indépendantes et possédant chacune une variance égale à 1.

Montrer que $(\sigma_1 U, \sigma_2 \rho U + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}V)$ a pour matrice de variance-covariance M.

□ Exercice 39

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Soit U une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbf{N}$, admettant un moment d'ordre deux.

a) A. Démontrer la formule : $\mathbf{E}(U) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(U \geqslant j)$.

B. Exprimer de même la somme $\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbf{P}(U \geqslant j)$ en fonction de $\mathbf{E}(U^2)$ et $\mathbf{E}(U)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendantes, de même loi.

On note pour tout $k \in \mathbf{N}$, $p_k = \mathbf{P}(X_n = k)$ et $F_k = \sum_{j=0}^{k} p_j$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $M_n = \sup_{1\leq i\leq n}(X_i)$.

b) Calculer, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(M_n \leq k)$ en fonction de F_k et n.

c) On suppose dans cette question que les variables X_n suivent la loi uniforme sur $\mathbf{N}_K = \{1,2,\ldots,K\}$, où K est un entier strictement supérieur à 1.

d) A. Calculer pour tout $k \in \mathbf{N}_K$, la probabilité $\mathbf{P}(M_n = k)$.

B. On jette trois dés équilibrés ; quelle est la probabilité que le plus grand des chiffres obtenus soit 4 ?

e) On suppose maintenant que les variables X_n suivent la loi géométrique sur $\mathbf{N}^*$ de paramètre p (avec $0 < p < 1$) et on note $q = 1-p$.

A. Calculer $\mathbf{E}(M_n)$.

B. Trois joueurs jouent à Pile ou Face avec une pièce équilibrée et s'arrêtent dès qu'ils ont obtenu un Pile. La variable aléatoire M_3 est alors le nombre de jets effectués par le ou les joueurs ayant obtenu Pile en dernier. Calculer $\mathbf{E}(M_3)$.

□ Exercice 40

Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) A. Montrer que $\mathbf{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

B. En déduire l'inégalité $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

b) On considère dans toute cette question une variable aléatoire discrète Z définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, d'espérance nulle et de variance σ^2.

A. Montrer que
$$\forall a > 0,\ \forall x \geqslant 0,\ \mathbf{P}(Z \geqslant a) \leqslant \mathbf{P}(\ (Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\ )$$

B. Montrer que $\forall a > 0,\ \forall x \geqslant 0,\ \mathbf{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$.

C. Montrer que $\forall a > 0,\ \mathbf{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$.

D. En déduire que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda+1}$.

c) Pour tout réel t, on pose $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k$.

A. Pour tout réel t, justifier l'existence de $G_X(t)$ et calculer sa valeur.

B. Montrer que : $\forall t \geqslant 1, \forall a > 0,\ \mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}$.

C. En déduire que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant (\frac{e}{4})^\lambda$.

□ Exercice 41 Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
On définit la fonction φ_X sur $\mathbf{R}^*$ par :
$$\forall\, t \in \mathbf{R}^*, \varphi_X(t) = \tfrac{1}{t}\ln(\mathbf{E}(e^{tX}))$$
où E désigne l'opérateur espérance.

a) Montrer que φ_X est ainsi bien définie sur $\mathbf{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0, en posant $\varphi_X(0) = \mathbf{E}(X)$.
On note encore φ_X la fonction ainsi prolongée.

b) Démontrer que φ_X est dérivable en 0 et calculer $\varphi'_X(0)$ à l'aide de la variance de X.

c) A. Montrer que pour tout $u \leqslant 0$, on a : $e^u \leqslant 1 + u + \frac{1}{2}u^2$.

B. Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, on a :
$$\forall\, t \geqslant 0, \varphi_X(t) \leqslant \mathbf{E}(X) + \tfrac{t}{2}\mathbf{E}(X^2)$$

d) A. Pour tout $i \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$, on note f_i la fonction $t \mapsto e^{tx_i}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

B. En déduire que deux variables discrètes finies X et Y ont la même loi si et seulement si les fonctions φ_X et φ_Y sont égales.

e) Montrer que si X et Y sont des variables discrètes finies indépendantes, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.

f) Montrer que φ_X est impaire si et seulement si X est une variable symétrique, c'est-à-dire telle que X et $-X$ ont la même loi.

□ **Exercice 42** Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
Soit Z et T les variables aléatoires définies par :

$$Z = |X - Y| \text{ et } T = \inf(X, Y)$$

a) A. Justifier l'existence des moments de tous ordres de Z et T.

B. Montrer que $\mathbf{E}(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$.

C. En déduire $\mathbf{E}(T)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

b) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, telle qu'il existe $K \in \mathbf{N}^*$ vérifiant : $0 \leq U \leq K$.

A. Calculer $\sum_{j=1}^{K} j^2 \mathbf{P}(U \geqslant j)$ en fonction de $\mathbf{E}(U)$, $\mathbf{E}(U^2)$ et $\mathbf{E}(U^3)$.

c) A. Calculer pour tout $j \in \mathbf{N}$, la probabilité $\mathbf{P}(T \geqslant j)$.

B. Retrouver la valeur de $\mathbf{E}(T)$.

d) Calculer $\mathbf{E}(Z^2)$ en fonction de la variance σ_X^2 de la variable aléatoire X.

□ **Exercice 43** Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et k un entier tel que $2 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. Un joueur tire en une seule fois k boules de l'urne. On désigne par X_1 et X_k les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro tiré.

a) Dans cette question, $k = 2$.

A. Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance.

B. Déterminer la loi de X_2, comparer X_1 et $n + 1 - X_2$, puis calculer $\mathbf{E}(X_2)$.

b) On revient au cas général : $2 \leq k \leq n$.

A. Déterminer la loi de X_1.

B. Le joueur note les numéros des boules sorties et range ces nombres dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Pour j appartenant à $[\![1 ; k]\!]$, soit X_j la variable aléatoire égale au $j^{ème}$ numéro obtenu dans l'ordre croissant, donc égal à x_j et on pose :

$$D_1 = X_1, D_2 = X_2 - X_1, \ldots, D_k = X_k - X_{k-1}.$$

On pose de plus $D_{k+1} = n + 1 - X_k$.

Préciser la loi du vecteur aléatoire $(D_1, D_2, \ldots, D_{k+1})$, et expliquer pourquoi les variables $(D_j)_{1 \leq j \leq k+1}$ suivent toutes la même loi.

C. En déduire les espérances de X_1 et de X_k, puis la formule :

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} i \binom{n-i}{k-1} = \binom{n+1}{k+1}$$

□ **Exercice 44** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles admettant une variance. On introduit la matrice $S = \left(\operatorname{cov}(X_i, X_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et l'application définie sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ par :

$$\forall U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \quad f(U) = \frac{1}{\|U\|^2} \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right).$$

a) Montrer que S est diagonalisable.

b) Prouver que pour tout $U \in \mathbf{R}^n$, $U^T S U = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right)$.

c) On ordonne les valeurs propres de S dans l'ordre décroissant : $\lambda_n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1$. Soit $U \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

A. Montrer que $U^T S U \leqslant \lambda_1 \|U\|^2$.

B. En déduire que $f(U) \leqslant \lambda_1$. Prouver que cette inégalité est une égalité si et seulement si U est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_1.

d) A. Soit $a \in]0,1[$. On choisit ici $S = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de S.

B. En déduire $\max_{U \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} f(U)$ et donner les vecteurs U pour lesquels ce maximum est atteint.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 45** On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $p \in \mathscr{P}$ et $m \in \mathbf{N}^*$, on note $\delta_p(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } p|m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(m) = \sum_{p \in \mathscr{P}} \delta_p(m)$ le nombre de diviseurs premiers de m.

Pour toute partie A de $\mathbf{N}^*$ on note $\mathbf{P}_n(A) = \frac{1}{n}\mathrm{Card}(A \cap [\![1,n]\!])$. Pour toute application f de $\mathbf{N}^*$ vers $\mathbf{R}$, on note $\mathbf{E}_n(f)$ et $V_n(f)$ l'espérance et la variance de la restriction de f à $[\![1,n]\!]$ muni de la loi uniforme.

On pose $a_n = \mathbf{E}_n(g) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g(k)$.

1) Soient $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers distincts. Montrer que $e^{-\sum_{i=1}^k \ln(1-\frac{1}{p_i})}$ est la somme des inverses des entiers dont les diviseurs premiers sont parmi $\{p_1, \ldots, p_k\}$.
En déduire que la famille $(\frac{1}{p})_{p \in \mathscr{P}}$ n'est pas sommable.

2) Démontrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

3) Soient p, q des nombres premiers distincts. Démontrer que

$$\mathbf{E}_n\left(\left(\delta_p - \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor\right).\left(\delta_q - \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor\right)\right) \leqslant \frac{1}{np} + \frac{1}{nq}$$

4) En déduire que $V_n(g) \leqslant 3 \sum_{p \in \mathscr{P},\ p \leqslant n} \frac{1}{p}$.

5) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathbf{P}_n\left(\left|\frac{g}{a_n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
(c'est le théorème de Hardy-Ramanujan)

□ **Exercice 46** Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

1) Pour $t \in \mathbf{R}$, justifier l'existence de $\varphi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right)$.

2) Montrer que φ_X est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

3) Montrer que φ_X détermine la loi de X.

□ **Exercice 47**

1) Soient p un réel > 1 et $q = \dfrac{p}{p-1}$.

a) Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}_+$.

b) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que $X \in L^p$ et $Y \in L^q$. Montrer que $XY \in L^1$ et que $\mathbf{E}(|XY|) \leqslant \mathbf{E}\left(|X|^p\right)^{1/p} \mathbf{E}\left(|Y|^q\right)^{1/q}$.

2) Soient maintenant deux réels tels que $1 \leqslant p < q$. Montrer que si $X \in L^q$, alors $X \in L^p$ et que $\mathbf{E}\left(|X|^p\right)^{1/p} \leqslant \mathbf{E}\left(|X|^q\right)^{1/q}$.

3) Soient $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes et p un réel $\geqslant 1$. Montrer que, si $X \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$, alors $\mathbf{E}\left(|X|^p\right)^{1/p} \leqslant C\sqrt{p}\,\mathbf{E}\left(X^2\right)^{1/2}$, où C est une constante absolue.

Table des matières

7 Algèbre générale 2
8 Probabilités I 11
9 Réduction II 18
10 Espaces vectoriels normés I 26
11 Séries entières 33
12 Espaces préhilbertiens I 43
13 Probabilités II 52